Title: Theorie der Abel'schen Functionen

Author: Karl Weierstrass

Release Date: August 26, 2009 [EBook #29780]

Language: German

Character set encoding: ISO-8859-1

Produced by K.F. Greiner, Andrew D. Hwang, Joshua Hutchinson
and the Online Distributed Proofreading Team at

Anmerkung der Korrekturleser

Diese PDF-Datei wurde für den Bildschirm optimiert, kann bei Bedarf aber leicht für den Drucker angepasst werden. Bitte finden Sie weitergehende Informationen am Anfang des LaTeX-Quelltexts.

Theorie

der Abel'schen Functionen

von

Karl Weierstraß.

Erstes Heft.

Abdruck aus dem „Journal für die reine und angewandte Mathematik."



Berlin.

Druck und Verlag von Georg Reiner.

1856.

Einleitung

Das ***Abel'***sche Theorem über die hyperelliptischen Integrale bildet die Grundlage für die Theorie einer neuen Gattung analytischer Functionen, die deswegen passend ***Abel'sche Functionen*** genannt, und folgendermaßen definirt werden können.

Es bedeute

$$\boldsymbol{R}(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_{2\varrho+1})$$

eine ganze Function $(2\varrho + 1)$ten Grades von x, wobei angenommen werde, daß unter den Größen

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{2\varrho+1}$$

keine zwei gleiche sich finden, während sie im Übrigen beliebige (reelle und imaginäre) Werthe haben können. Ferner seien $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$ ϱ unbeschränkt veränderliche Größen, und zwischen diesen und eben so vielen von ihnen abhängigen $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ die nachstehenden Differential-Gleichungen, in denen

$$\boldsymbol{P}(x) \quad \text{das Product} \quad (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_\varrho)$$

bedeutet, gegeben:

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{u}_1 &= \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{P}(x_1)}{x_1 - a_1} \cdot \frac{dx_1}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_1)}} + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{P}(x_2)}{x_2 - a_1} \cdot \frac{dx_2}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_2)}} + \cdots + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{P}(x_\varrho)}{x_\varrho - a_1} \cdot \frac{dx_\varrho}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho)}}, \\
d\boldsymbol{u}_2 &= \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{P}(x_1)}{x_1 - a_2} \cdot \frac{dx_1}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_1)}} + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{P}(x_2)}{x_2 - a_2} \cdot \frac{dx_2}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_2)}} + \cdots + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{P}(x_\varrho)}{x_\varrho - a_2} \cdot \frac{dx_\varrho}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho)}}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
d\boldsymbol{u}_\varrho &= \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{P}(x_1)}{x_1 - a_\varrho} \cdot \frac{dx_1}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_1)}} + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{P}(x_2)}{x_2 - a_\varrho} \cdot \frac{dx_2}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_2)}} + \cdots + \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{P}(x_\varrho)}{x_\rho - a_\varrho} \cdot \frac{dx_\varrho}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho)}};{}^{*})
\end{aligned}$$

mit der Bestimmung, daß $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ die Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ annehmen sollen, wenn $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$ sämmtlich verschwinden.

Alsdann sind $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ als die Wurzeln einer Gleichung von der Form

$$x^\varrho + \boldsymbol{P}_1 x^{\varrho-1} + \boldsymbol{P}_2 x^{\varrho-2} + \cdots + \boldsymbol{P}_\varrho = 0$$

---

*) Man kann diesen Differential-Gleichungen mancherlei verschiedene Formen geben; die hier gewählte vereinfacht die Rechnung nicht unwesentlich, ohne daß, wie später soll gezeigt werden, der Allgemeinheit Abbruch geschieht.

zu betrachten, wo $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, …, $\boldsymbol{P}_\varrho$ eindeutige analytische Functionen von $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, …, $\boldsymbol{u}_\varrho$ bedeuten; während eine zweite ganze Function von x des $(\varrho-1)$ten Grades

$$\boldsymbol{Q}_1 x^{\varrho-1} + \boldsymbol{Q}_2 x^{\varrho-2} + \cdots + \boldsymbol{Q}_\varrho,$$

deren Coefficienten eben solche Functionen von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_\varrho$ sind, wenn man $x = x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ setzt, die zugehörigen Werthe von

$$\sqrt{\boldsymbol{R}(x_1)}, \quad \sqrt{\boldsymbol{R}(x_2)}, \quad \ldots, \quad \sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho)}$$

giebt.*)

Hiernach ist jeder rational und symmetrisch aus

$$x_1, x_2, \ldots, x_\varrho \quad \text{und} \quad \sqrt{\boldsymbol{R}(x_1)}, \sqrt{\boldsymbol{R}(x_2)}, \ldots, \sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho)}$$

zusammengesetzte Ausdruck als eine eindeutige Function von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots \boldsymbol{u}_\varrho$ anzusehn. Insbesondere aber zeigt es sich, daß das Product

$$(a_\mathfrak{r} - x_1)(a_\mathfrak{r} - x_2)\cdots(a_\mathfrak{r} - x_\varrho),$$

wo $\mathfrak{r}$ eine der Zahlen 1, 2, … $2\varrho+1$ bedeutet, das ***Quadrat*** einer solchen ist. Betrachtet man demgemäß, indem man

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_\varrho)$$

setzt, und unter $h_1, h_2, \ldots, h_{2\varrho+1}$ Constanten versteht, die Größen

$$\sqrt{h_1\varphi(a_1)}, \quad \sqrt{h_2\varphi(a_2)}, \quad \ldots, \quad \sqrt{h_{2\varrho+1}\varphi(a_{2\varrho+1})}$$

als Functionen von $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, …, $\boldsymbol{u}_\varrho$, so kann man nicht nur aus denselben die Coefficienten der Gleichung, deren Wurzeln x_1, x_2, …, x_ϱ sind, leicht zusammensetzen, sondern sie zeichnen sich auch gleich den ***elliptischen*** $\sin\operatorname{am}\boldsymbol{u}$, $\cos\operatorname{am}\boldsymbol{u}$, $\Delta\operatorname{am}\boldsymbol{u}$, auf welche sie sich für $\varrho = 1$ reduciren, und denen sie überhaupt vollkommen analog sind, durch eine solche Menge merkwürdiger und fruchtbarer Eigenschaften aus, daß man ihnen und einer Reihe anderer, im Zusammenhange mit denselben stehenden, vorzugsweise den Namen „***Abel'sche Functionen***" zu geben berechtigt ist, und sie zum Hauptgegenstande der Betrachtung zu machen aufgefordert wird.

Die nächste Aufgabe, welche sich nun darbietet, betrifft die wirkliche Darstellung der im Vorstehenden definirten Größen, sowie die Entwicklung

---

*) Den ersten Theil dieses Satzes hat bereits ***Jacobi*** ausgesprochen, und dadurch den wahren analytischen Charakter der Größen x_1, x_2, …, x_ϱ klar gemacht.

ihrer hauptsächlichsten Eigenschaften. Sodann ist es auch erforderlich, das Integral

$$\int\left\{\frac{F(x_1)\,dx_1}{\sqrt{R(x_1)}}+\frac{F(x_2)\,dx_2}{\sqrt{R(x_2)}}+\cdots+\frac{F(x_\varrho)\,dx_\varrho}{\sqrt{R(x_\varrho)}}\right\},$$

wo $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeutet, als Function von u_1, $u_2, \ldots, u_\varrho$ auszudrücken. Beide Probleme finden in der gegenwärtigen Schrift, deren Resultate ich zum Theil schon früher in zwei kleinern Abhandlungen*) bekannt gemacht habe, ihre vollständige Erledigung, und zwar auf einem Wege, welcher von dem für die ***Abel'***schen Functionen *zweier* Argumente von ***Göpel*** und ***Rosenhain*** betretenen gänzlich verschieden ist. Die genannten Mathematiker gehen nämlich von unendlichen Reihen aus, die sie aus denen, durch welche ***Jacobi*** die elliptischen Functionen auszudrücken gelehrt hat, durch eine von tiefer analytischer Einsicht zeugende Verallgemeinerung erhalten, und zeigen dann, wie sich aus denselben, die zwei veränderliche Größen u_1, u_2 enthalten, die Coefficienten einer quadratischen Gleichung so zusammensetzen lassen, daß zwischen deren Wurzeln und u_1, u_2 zwei Differential-Gleichungen von der oben aufgestellten Form bestehen. Dagegen war mein Bestreben von Anfang an auf die Auffindung einer Methode gerichtet, die geeignet sei, unmittelbar von den genannten Differential-Gleichungen aus für jeden Werth von ϱ auf einem einfachen, alle Willkührlichkeit ausschließenden Wege zur Darstellung der Größen $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ als Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ in einer für alle Werthe der letztern gültig bleibenden Form zu führen. Durch weitere Ausbildung eines Verfahrens, dessen ich mich bereits früher zur directen Entwicklung der elliptischen Functionen, ohne Voraussetzung der Multiplications – und Transformations-Formeln mit gutem Erfolge bedient hatte, gelang es mir, das Ziel, welches ich mir gesteckt, vollständig zu erreichen; wo sich denn als schließliches Resultat meiner Untersuchungen ergab, daß sich sämmtliche ***Abel'***sche Functionen einer bestimmten Ordnung auf eine einzige, in einfacher Form darstellbare Transcendente zurückführen lassen. Damit ist aber für sie dasselbe erreicht, was für die elliptischen Functionen ***Jacobi*** gethan hat, und was ***Lejeune Dirichlet*** in seiner Gedächtnißrede auf den großen Mathematiker mit Recht als eine der bedeutendsten Leistungen desselben bezeichnet.

Die vorliegende Arbeit ist unter mancherlei äußern Hemmungen entstanden, die mir nur von Zeit zu Zeit, und oftmals nach langer Unterbrechung, mit derselben mich zu beschäftigen gestatteten. Ohne Zweifel wird man Spuren davon an nicht wenigen Stellen entdecken. Gleichwohl hoffe ich, daß ihr die Sachkundigen auch in der Gestalt, wie ich sie jetzt ihrer Beurtheilung vorlege,

*) Programm des *Braunsberger* Gymnasiums v. J. 1849 und *Crelle*'s Journal Bd. 47.

nicht ganz ihren Beifall versagen, und wenigstens *ein* Ergebniß derselben mit Befriedigung aufnehmen werden, die Thatsache nämlich, daß sich die elliptischen und die ***Abel'***schen Functionen nach einer für alle Ordnungen gleich bleibenden und zugleich directen Methode behandeln lassen; und ich trage kein Bedenken, zu gestehen, daß ich auf *dieses* Resultat meiner Arbeit einigen Werth lege, und es als ein für die Wissenschaft nicht unbedeutendes betrachte.

Erstes Kapitel.

Erklärung der Abel'schen Functionen; Bestimmung der analytischen Form derselben.

§. 1.

Ich beginne mit der Ermittelung der Form, unter welcher der Zusammenhang zwischen den Größen $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\varrho$ und $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_\varrho$ dargestellt werden kann. Zuvörderst aber möge, zur Vermeidung von Wiederholungen, hier ein für allemal in Betreff einiger Bezeichnungen, die ich im Verlaufe der ganzen Abhandlung unverändert beibehalten werde, Folgendes festgestellt werden.

Die ersten Buchstaben des deutschen Alphabets, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ... sollen, sobald nicht ausdrücklich etwas Anderes bestimmt wird, ausschließlich Zahlen aus der Reihe

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \varrho$$

bedeuten, in der Art, daß jeder derselben, wo er in einer Formel vorkommt, unabhängig von den übrigen etwa in ihr sich findenden, sämmtliche dieser Reihe angehörigen Werthe durchlaufen kann. Ein Ausdruck, der einen oder mehrere dieser Buchstaben enthält, repräsentirt demnach, je nachdem die Zahl derselben 1, oder 2, oder 3 u. s. w. ist, ϱ, oder ϱ^2, oder ϱ^3 u. s. w. Werthe. Die Summe aller dieser Werthe soll dann ferner durch ein dem Ausdrucke vorgesetztes $\sum$ bezeichnet werden, und zwar in der Regel ohne besondere Andeutung der Buchstaben, auf welche es sich bezieht, was nur in dem Falle nicht unterbleiben darf, wenn außer derselben noch andere deutsche Buchstaben vorkommen.

Hiernach ist z. B.

$$\sum \boldsymbol{F}(\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho} \boldsymbol{F}(\mathfrak{a})$$

$$\sum \boldsymbol{F}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} \boldsymbol{F}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Dagegen soll

$$\sum_{\mathfrak{a}} \boldsymbol{F}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho} \boldsymbol{F}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$$

$$\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \boldsymbol{F}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}) = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=\varrho} \sum_{\mathfrak{b}=1}^{\mathfrak{b}=\varrho} \boldsymbol{F}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$$

sein; u. s. w.

Kommt es in einem besondern Falle vor, daß bei einer solchen Summation ein Buchstabe von den festgesetzten Werthen irgend einen bestimmten nicht annehmen darf, so soll darauf durch ein dem $\sum$ oben beigefügtes ($'$) aufmerksam gemacht, und zugleich der auszuschließende Werth neben der Summenformel angegeben werden; wonach z. B. die Bedeutung der Formel

$$\sum_{\mathfrak{a}}{}' \left(\frac{1}{a_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}} \right), \qquad (\mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b})$$

klar ist.

Endlich bemerke ich noch, daß eine Gleichung, die einen, oder zwei u. s. w. der in Rede stehenden deutschen Buchstaben enthält, ein System von ϱ, oder ϱ^2 u. s. w. Gleichungen darstellt; so daß z. B. die in der Einleitung aufgestellten Differential-Gleichungen sämmtlich in der folgenden

$$\text{(1.)} \qquad d\boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}}$$

enthalten sind.

Dies vorausgeschickt soll nun zunächst gezeigt werden, daß sich $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ bei hinlänglich kleinen Werthen von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$ nach ganzen positiven Potenzen dieser Größen in convergirende Reihen entwickeln lassen.

Wenn die Differenz $x - a_\mathfrak{r}$, wo $\mathfrak{r}$ irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 2\varrho + 1$ bezeichnen soll, dem absoluten Betrage*) nach kleiner ist als die Differenz zwischen $a_\mathfrak{r}$ und jeder andern der Größen $a_1, a_2, \ldots, a_{2\varrho+1}$ (was durch den Ausdruck „es befinde sich x in der Nähe von $a_\mathfrak{r}$" bezeichnet werden möge), so läßt sich

$$\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}} \quad \text{durch eine convergirende Reihe von der Form}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{R}'(a_\mathfrak{r})(x - a_\mathfrak{r})}} \cdot \left\{1 + (\mathfrak{r})_1 (x - a_\mathfrak{r}) + (\mathfrak{r})_2 (x - a_\mathfrak{r})^2 + \cdots\right\}$$

darstellen, wo $\boldsymbol{R}'(x) = \dfrac{\partial \boldsymbol{R}(x)}{\partial x}$, und $(\mathfrak{r})_1$, $(\mathfrak{r})_2$ u. s. w. rational aus $a_\mathfrak{r}$ und den Coefficienten von $\boldsymbol{R}(x)$ zusammengesetzte Ausdrücke sind.

Wird daher angenommen, es befinde sich x_1 in der Nähe von a_1, x_2 in der Nähe von a_2 u. s. w., und setzt man,

$$\frac{\boldsymbol{R}(x)}{\boldsymbol{P}(x)} = \boldsymbol{A}_0(x - a_{\varrho+1}) \cdots (x - a_{2\varrho+1}) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{Q}(x), \qquad \frac{\partial \boldsymbol{P}(x)}{\partial x} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{P}'(x)$$

bezeichnend,

$$\text{(2.)} \qquad \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{a})}{\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{a})}(x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a})\right)} = s_\mathfrak{a}\,,$$

so hat man

$$\frac{1}{2}\,\frac{\boldsymbol{P}(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - x_\mathfrak{b}} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})}} = \Big((\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_0 + (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_1\, s_\mathfrak{a}^2 + (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_2\, s_\mathfrak{a}^4 + \cdots\Big)\, ds_\mathfrak{a}\,,$$

wo $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_0$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_1$ u. s. w. rationale, aus $a_\mathfrak{a}$, $a_\mathfrak{b}$ und den Coefficienten von $\boldsymbol{P}(x)$, $\boldsymbol{Q}(x)$ zusammengesetzte Ausdrücke bedeuten, und insbesondere

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a})_0 = 1, \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_0 = 0, \quad \text{wenn } \mathfrak{a} \gtrless \mathfrak{b},$$

*) Unter dem absoluten Betrage oder Werthe einer complexen (imaginären) Größe verstehe ich hier den analytischen Modul derselben, wie er sonst genannt wird. Der Umstand, daß das Wort *Modul* in so verschiedenem Sinne gebraucht wird, und namentlich in der Theorie der elliptischen und ***Abel***'schen Functionen bereits eine feststehende Bedeutung hat, möge die Einführung der vorgeschlagenen Benennung entschuldigen.

ist. Hiernach geben die Gleichungen (1.) durch Integration

$$(3.)\quad \begin{cases} u_1 = s_1 + \mathbf{S}\left\{\sum \frac{(\mathfrak{a},1)_\mathfrak{n}}{2\mathfrak{n}+1}\, s_\mathfrak{a}^{2\mathfrak{n}+1}\right\}, \\ \qquad\qquad \mathfrak{n}=1\ldots\infty \\ u_2 = s_2 + \mathbf{S}\left\{\sum \frac{(\mathfrak{a},2)_\mathfrak{n}}{2\mathfrak{n}+1}\, s_\mathfrak{a}^{2\mathfrak{n}+1}\right\}, \\ \qquad\qquad \mathfrak{n}=1\ldots\infty \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_\varrho = s_\varrho + \mathbf{S}\left\{\sum \frac{(\mathfrak{a},\varrho)_\mathfrak{n}}{2\mathfrak{n}+1}\, s_\mathfrak{a}^{2\mathfrak{n}+1}\right\}. \\ \qquad\qquad \mathfrak{n}=1\ldots\infty \end{cases}$$

Aus diesen Reihen erhält man dann ferner durch Umkehrung die folgenden, in denen $(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_\mathfrak{n}$ eine ganze homogene Function $\mathfrak{n}$ten Grades von u_1, u_2, $\ldots$, u_ϱ bezeichnen soll.

$$(4.)\quad \begin{cases} s_1 = \sqrt{\left(\frac{P'(a_1)}{Q(a_1)}(x_1-a_1)\right)} = u_1 + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_3 + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_5 + \cdots, \\ s_2 = \sqrt{\left(\frac{P'(a_2)}{Q(a_2)}(x_2-a_2)\right)} = u_2 + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_3 + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_5 + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_\varrho = \sqrt{\left(\frac{P'(a_\varrho)}{Q(a_\varrho)}(x_\varrho-a_\varrho)\right)} = u_\varrho + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_3 + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_5 + \cdots. \end{cases}$$

Ferner, da sich

$$\frac{P(x_\mathfrak{a})}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}} \quad \text{in eine Reihe von der Form}$$

$$s_\mathfrak{a} + (\mathfrak{a})_1\, s_\mathfrak{a}^3 + (\mathfrak{a})_2\, s_\mathfrak{a}^5 + \cdots$$

entwickeln läßt,

$$(5.)\qquad \frac{P(x_\mathfrak{a})}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}} = \frac{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}{Q(x_\mathfrak{a})} = u_\mathfrak{a} + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_3 + (u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_5 + \cdots.$$

$$(\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

Die vorstehenden Reihen können nicht für alle Werthe von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$ convergiren, sondern nur für solche, die gewisse Bedingungen erfüllen. Es ist aber für den gegenwärtigen Zweck nicht erforderlich, diese aufzusuchen; es genügt vielmehr anzunehmen, daß die Reihen (3 – 5) für *irgend welche* Werthe von $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$, deren absolute Beträge durch $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \ldots, \boldsymbol{U}_\varrho$ bezeichnet werden mögen, sämmtlich convergent seien – wozu man nach einem allgemeinen Satze über die Reihenentwicklungen von Functionen, die algebraischen Differential-Gleichungen genügen, berechtigt ist*) . Dann sind sie es auch unbedingt, sobald man für $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$ nur solche Werthe zuläßt, die dem absoluten Betrage nach kleiner als beziehlich $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \ldots, \boldsymbol{U}_\varrho$ sind, und geben unter dieser Voraussetzung

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\varrho, \qquad \sqrt{\boldsymbol{R}(x_1)},\ \sqrt{\boldsymbol{R}(x_2)}, \ldots,\ \sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho)}$$

als völlig bestimmte, eindeutige Functionen von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$. Wenn man aber die vorstehenden Größen für alle Werthe von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$ innerhalb der bezeichneten Gränzen berechnen kann, so ist durch das ***Abel'sche Theorem*** die Möglichkeit gegeben, dieses auch für *beliebig große* Werthe der genannten Veränderlichen auszuführen.

§. 2.

Um dieses nachzuweisen, nehme man statt $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$ (2μ) Reihen von je ϱ solchen veränderlichen Größen

$$(1.)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{u}_1', & \boldsymbol{u}_2', & \ldots, & \boldsymbol{u}_\varrho', \\ \boldsymbol{u}_1'', & \boldsymbol{u}_2'', & \ldots, & \boldsymbol{u}_\varrho'', \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \boldsymbol{u}_1^{(2\mu)}, & \boldsymbol{u}_2^{(2\mu)}, & \ldots, & \boldsymbol{u}_\varrho^{(2\mu)} \end{cases}$$

an, die keiner andern Beschränkung unterworfen sein sollen, als daß

$$\boldsymbol{u}_\mathfrak{a}',\ \boldsymbol{u}_\mathfrak{a}'',\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_\mathfrak{a}^{(2\mu)}$$

sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als $\boldsymbol{U}_\mathfrak{a}$ vorausgesetzt werden. Ferner bezeichne man, wenn $\mathfrak{m}$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots, 2\mu$ bedeutet, mit

$$\begin{matrix} s_1^{(\mathfrak{m})}, & s_2^{(\mathfrak{m})}, & \ldots, & s_\varrho^{(\mathfrak{m})}, \\ x_1^{(\mathfrak{m})}, & x_2^{(\mathfrak{m})}, & \ldots, & x_\varrho^{(\mathfrak{m})}, \\ \sqrt{\boldsymbol{R}(x_1^{(\mathfrak{m})})}, & \sqrt{\boldsymbol{R}(x_2^{(\mathfrak{m})})}, & \ldots, & \sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho^{(\mathfrak{m})})} \end{matrix}$$

*) Vergl. meine Abhandlung über die analytischen Facultäten in *Crelle*'s Journal Bd. 51. S. 43.

die Größen, welche man für

$$\begin{array}{cccc} s_1, & s_2, & \dots, & s_\varrho, \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_\varrho, \\ \sqrt{\boldsymbol{R}(x_1)}, & \sqrt{\boldsymbol{R}(x_2)}, & \dots, & \sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho)} \end{array}$$

vermittelst der Reihen (4, 5) des vorhergehenden §. erhält, wenn man dort $\boldsymbol{u}_1^{(\mathfrak{m})}$, $\boldsymbol{u}_2^{(\mathfrak{m})}, \dots, \boldsymbol{u}_\varrho^{(\mathfrak{m})}$ an die Stelle von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_\varrho$ setzt. Sodann hat man zwei ganze Functionen $\boldsymbol{M}(x)$, $\boldsymbol{N}(x)$ von der Form

$$(2.)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{M}(x) = x^{\mu\varrho} + \boldsymbol{M}_1 x^{\mu\varrho-1} + \dots + \boldsymbol{M}_{\mu\varrho}, \\ \boldsymbol{N}(x) = \qquad \boldsymbol{N}_1 x^{\mu\varrho-1} + \dots + \boldsymbol{N}_{\mu\varrho}, \end{cases}$$

vermittelst der folgenden $(2\mu\varrho)$ Gleichungen

$$(3.)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{M}(x'_\mathfrak{a}) \dfrac{\sqrt{\boldsymbol{R}(x'_\mathfrak{a})}}{\boldsymbol{Q}(x'_\mathfrak{a})} + \boldsymbol{N}(x'_\mathfrak{a}) = 0, \\ \boldsymbol{M}(x''_\mathfrak{a}) \dfrac{\sqrt{\boldsymbol{R}(x''_\mathfrak{a})}}{\boldsymbol{Q}(x''_\mathfrak{a})} + \boldsymbol{N}(x''_\mathfrak{a}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{M}(x_\mathfrak{a}^{(2\mu)}) \dfrac{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a}^{(2\mu)})}}{\boldsymbol{Q}(x_\mathfrak{a}^{(2\mu)})} + \boldsymbol{N}(x_\mathfrak{a}^{(2\mu)}) = 0, \\ \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots, \varrho) \end{cases}$$

zu bestimmen, worauf die ganze Function $(2\mu\varrho + \varrho)$ten Grades

$$\boldsymbol{P}(x)\,\boldsymbol{M}^2(x) - \boldsymbol{Q}(x)\,\boldsymbol{N}^2(x)$$

für $x = x'_1, \dots, x'_\varrho, x''_1, \dots, x''_\varrho, \dots, x_1^{(2\mu)}, \dots, x_\varrho^{(2\mu)}$ Null wird, und daher durch das Product

$$(x - x'_1) \cdots (x - x'_\varrho)(x - x''_1) \cdots (x - x''_\varrho) \cdots (x - x_1^{(2\mu)}) \cdots (x - x_\varrho^{(2\mu)}),$$

welches durch $\Pi(x)$ bezeichnet werden möge, theilbar ist, so daß man

$$(4.)\qquad \boldsymbol{P}(x)\,\boldsymbol{M}^2(x) - \boldsymbol{Q}(x)\,\boldsymbol{N}^2(x) = \Pi(x)\,\varphi(x)$$

setzen kann, wo $\varphi(x)$ eine ganze Function von der Form

$$x^{\varrho} + \boldsymbol{P}_1 x^{\varrho-1} + \boldsymbol{P}_2 x^{\varrho-2} + \cdots + \boldsymbol{P}_{\varrho}$$

bedeutet, in der $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \ldots, \boldsymbol{P}_{\varrho}$ rational aus

$$(5.)\quad \begin{cases} x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, x'_{\varrho}, \\ x''_1, \quad x''_2, \quad \ldots, x''_{\varrho}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{(2\mu)}_1, x^{(2\mu)}_2, \ldots, x^{(2\mu)}_{\varrho}, \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \sqrt{\boldsymbol{R}(x'_1)}, \quad \sqrt{\boldsymbol{R}(x'_2)}, \quad \ldots, \sqrt{\boldsymbol{R}(x'_{\varrho})}, \\ \sqrt{\boldsymbol{R}(x''_1)}, \quad \sqrt{\boldsymbol{R}(x''_2)}, \quad \ldots, \sqrt{\boldsymbol{R}(x''_{\varrho})}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sqrt{\boldsymbol{R}(x^{(2\mu)}_1)}, \sqrt{\boldsymbol{R}(x^{(2\mu)}_2)}, \ldots, \sqrt{\boldsymbol{R}(x^{(2\mu)}_{\varrho})}, \end{array}$$

zusammengesetzt, und daher auch als eindeutige Functionen der Größen (1.) zu betrachten sind. Bezeichnet man jetzt mit $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho}$ die ϱ Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(x) = 0,$$

so gelten nach dem ***Abel'schen Theorem*** die ϱ Gleichungen, die sich aus der nachstehenden

$$(6.)\quad \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{2} \left\{ \frac{\boldsymbol{P}(x'_{\mathfrak{a}})}{x'_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{dx'_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x'_{\mathfrak{a}})}} + \frac{\boldsymbol{P}(x''_{\mathfrak{a}})}{x''_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{dx''_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x''_{\mathfrak{a}})}} + \cdots \right\} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}}$$

ergeben, indem man $\mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, \varrho$ setzt, unter der Bedingung, daß man der Wurzelgröße $\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}$ den durch die Gleichung

$$(7.)\quad \sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})} = \frac{\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{a}})\,\boldsymbol{M}(x_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{N}(x_{\mathfrak{a}})} = \frac{\boldsymbol{Q}(x_{\mathfrak{a}})\,\boldsymbol{N}(x_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{M}(x_{\mathfrak{a}})}$$

bestimmten Werth beilege*) . Nun ist aber

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{P}(x'_{\mathfrak{a}})}{x'_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{dx'_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x'_{\mathfrak{a}})}} = d\boldsymbol{u}'_{\mathfrak{b}}, \quad \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{P}(x''_{\mathfrak{a}})}{x''_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{dx''_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x''_{\mathfrak{a}})}} = d\boldsymbol{u}''_{\mathfrak{b}}, \text{ u. s. w.}$$

Daher

$$(8.)\quad d\boldsymbol{u}'_{\mathfrak{b}} + d\boldsymbol{u}''_{\mathfrak{b}} + \cdots + d\boldsymbol{u}^{(2\mu)}_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}}.$$

$$(\mathfrak{b} = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

---

*) In Betreff des Beweises dieses Satzes verweise ich auf ***Abel's*** Abhandlung: Remarques sur quelques propriétés etc. in *Crelle*'s Journal, B. 3, S. 313 und Œuvres complètes, tome I, 288. Einen auf ganz andern Principien beruhenden Beweis des Satzes werde ich später geben.

Bevor aber aus diesen Gleichungen weitere Folgerungen gezogen werden, ist es nothwendig, die Zusammensetzungsweise der Coefficienten von $\boldsymbol{M}(x)$, $\boldsymbol{N}(x)$, $\varphi(x)$ aus den Größen (5.) oder (1.) einer nähern Betrachtung zu unterwerfen.

§. 3.

Es läßt sich, wenn x in der Nähe von $a_{\mathfrak{a}}$ angenommen und

$$(1.)\qquad \sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{a}})}(x-a_{\mathfrak{a}})\right)} = s, \qquad x = a_{\mathfrak{a}} + \frac{\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{a}})}\, s^2$$

gesetzt wird,

$$\frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}{\boldsymbol{Q}(x)} \quad \text{oder} \quad \frac{\boldsymbol{P}(x)}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}$$

in eine convergirende Reihe

$$(2.)\qquad s + (\mathfrak{a})_1\, s^3 + (\mathfrak{a})_2\, s^5 + \cdots$$

entwickeln, welche mit $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{a}}(s)$ bezeichnet werden möge, so wie auch die Functionen von s, in welche $\boldsymbol{M}(x)$, $\boldsymbol{N}(x)$, $\boldsymbol{P}(x)$, $\boldsymbol{Q}(x)$ durch die Substitution

$$x = a_{\mathfrak{a}} + \frac{\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{a}})}\, s^2$$

übergehen, durch $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}(s)$, $\boldsymbol{N}_{\mathfrak{a}}(s)$, $\boldsymbol{P}_{\mathfrak{a}}(s)$, $\boldsymbol{Q}_{\mathfrak{a}}(s)$ angedeutet werden sollen. Ferner setze man

$$(3.)\qquad \begin{cases} (s-s'_{\mathfrak{a}})(s-s''_{\mathfrak{a}})\cdots(s-s^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}}) = \pi_{\mathfrak{a}}(s), \\ \qquad \boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}(s)\,\boldsymbol{R}_{\mathfrak{a}}(s) + \boldsymbol{N}_{\mathfrak{a}}(s) = f_{\mathfrak{a}}(s), \end{cases}$$

so kann auch $f_{\mathfrak{a}}(s)$ für jeden Werth von s, der so beschaffen ist, daß der zugehörige Werth von x in der Nähe von $a_{\mathfrak{a}}$ liegt, in eine convergirende Reihe entwickelt werden. Es ist klar, daß $s'_{\mathfrak{a}}$, $s''_{\mathfrak{a}}$, u. s. w. in Folge der oben in Betreff der Größen (1, §. 2.) gemachten Annahme sämmtlich zu diesen Werthen von s gehören.

Angenommen nun, es sei überhaupt $f(s)$ eine Function von s, die sich für alle Werthe dieser Veränderlichen, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als ein bestimmter Gränzwerth S sind, durch eine convergirende Reihe von der Form

$$\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 s + \boldsymbol{A}_2 s^2 + \cdots$$

darstellen lasse, und $\pi(s)$ bedeute eine ganze Function $\mathfrak{n}$ten Grades, wobei zugleich angenommen werde, daß die Wurzeln der Gleichung $\pi(s) = 0$ sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner als S seien. Alsdann läßt sich für jeden Werth von s, der seinem absoluten Betrage nach größer als jede dieser Wurzeln ist,

$$\frac{1}{\pi(s)} = \boldsymbol{C}_0 s^{-\mathfrak{n}} + \boldsymbol{C}_1 s^{-\mathfrak{n}-1} + \boldsymbol{C}_2 s^{-\mathfrak{n}-2} + \cdots = \underset{\mathfrak{m}=0\ldots\infty}{\mathbf{S}\,\boldsymbol{C}_{\mathfrak{a}}\, s^{-\mathfrak{n}-\mathfrak{m}}}$$

setzen (wo $\mathfrak{m}$, so wie überhaupt im Folgenden die Buchstaben $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$, eine ganze Zahl, die alle Werthe zwischen den Gränzen 0 und ∞ annehmen kann, bezeichnet), und man erhält daher, indem man diese Reihe mit der für $f(s)$ multiplicirt, wenn der absolute Werth von s zugleich kleiner als **S** ist,

$$\frac{f(s)}{\pi(s)} = \boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{D}_1 s + \boldsymbol{D}_2 s^2 + \cdots$$
$$+ \boldsymbol{E}_0 s^{-1} + \boldsymbol{E}_1 s^{-2} + \cdots,$$

welche Reihen-Entwicklung von $\frac{f(s)}{\pi(s)}$ durch

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]$$

angedeutet werden möge, so wie durch

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{\pm\mathfrak{m}}}$$

der Coefficient von $s^{\pm\mathfrak{m}}$ in derselben. Ist nun

$$\pi(s) = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1 s + \cdots + \boldsymbol{B}_{\mathfrak{n}} s^{\mathfrak{n}},$$

so müssen, wenn man die Reihe $\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]$ mit $\pi(s)$ multiplicirt, aus dem Producte alle Glieder mit negativen Potenzen von s fortfallen, und daher

$$\boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}} + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}+1} + \cdots + \boldsymbol{B}_{\mathfrak{n}} \boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} = 0$$

sein, indem der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung der Coefficient von $s^{-\mathfrak{m}-1}$ in dem gedachten Producte ist. Diese Relation lehrt aber, daß die Coefficienten $\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{E}_1$ u. s. w. *sämmtlich* gleich Null sind, *sobald dies mit den* $\mathfrak{n}$ *ersten der Fall ist*. Denn da $\boldsymbol{B}_{\mathfrak{n}}$ nicht Null ist, so erhellt unmittelbar, daß $\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} = 0$ sein

muß, wofern $\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}, \boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}+1}, \ldots, \boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}-1}$ sämmtlich verschwinden; woraus, indem man der Reihe nach $\mathfrak{m} = 0, 1, 2,$ u. s. w. setzt, das Behauptete sofort sich ergiebt. Dann hat man

$$\frac{f(s)}{\pi(s)} = \boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{D}_1 s + \boldsymbol{D}_2 s^2 + \cdots,$$

oder

$$f(s) = (\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1 s + \cdots)(\boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{D}_1 s + \cdots)$$

für alle Werthe von s innerhalb der bezeichneten Gränzen. Die letztere Gleichung kann aber nicht anders bestehen, als wenn in der Reihe, die aus der Entwicklung des Products auf der rechten Seite hervorgeht, die Coefficienten mit den gleichstelligen von $f(s)$ übereinstimmen. Dann aber gilt sie, und mit ihr auch die vorhergehende überhaupt für alle Werthe von s, bei denen die Reihen

$$\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 s + \cdots, \quad \boldsymbol{D}_0 + \boldsymbol{D}_1 s + \cdots$$

beide convergiren. Für die letztere steht dies aber, ihrer Herleitung nach, fest, wenn der absolute Betrag von s zwischen zwei Gränzen, von denen die obere S ist, enthalten ist; es muß daher für *alle* Werthe von s, die dem absoluten Betrage nach unter S liegen, der Fall sein. Hiermit ist folgender Hülfssatz bewiesen, der bei mancherlei Untersuchungen mit Nutzen angewandt werden kann:

Wenn die oben näher charakterisirten Functionen $f(s)$, $\pi(s)$ so beschaffen sind, daß man

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-2}} = 0, \quad \ldots, \quad \left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-\mathfrak{n}}} = 0,$$

oder auch

$$\left[\frac{f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{sf(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0, \quad \ldots, \quad \left[\frac{s^{\mathfrak{n}-1}f(s)}{\pi(s)}\right]_{s^{-1}} = 0,$$

hat, so läßt sich der Quotient

$$\frac{f(s)}{\pi(s)}$$

für alle Werthe von s, bei denen die Reihe für $f(s)$ convergirt, ebenfalls durch eine nur ganze positive Potenzen von s enthaltende convergirende Reihe darstellen. Umgekehrt ist dies nicht der Fall, sobald die vorstehenden Bedingungsgleichungen nicht sämmtlich befriedigt werden.

Für die durch die Formeln (3.) definirten Functionen $f_{\mathfrak{a}}(s)$, $\pi_{\mathfrak{a}}(s)$ ist nun, nach dem oben Bemerkten, die Bedingung erfüllt, daß die Wurzeln der Gleichung $\pi_{\mathfrak{a}}(s) = 0$ sämmtlich dem absoluten Betrage nach kleiner sind als der

Gränzwerth, unter dem s bleiben muß, damit die Reihe für $f_\mathfrak{a}(s)$ unbedingt convergire. Wenn daher die Coefficienten von $\boldsymbol{M}(x)$ und $\boldsymbol{N}(x)$ so bestimmt werden können, daß die folgenden $(2\mu\varrho)$ Gleichungen

$$(4.)\qquad \left[\frac{f_\mathfrak{a}(s)}{\pi_\mathfrak{a}(s)}\right]_{s^{-1}} = 0,\quad \left[\frac{s f_\mathfrak{a}(s)}{\pi_\mathfrak{a}(s)}\right]_{s^{-1}} = 0,\quad \ldots,\quad \left[\frac{s^{2\mu-1} f_\mathfrak{a}(s)}{\pi_\mathfrak{a}(s)}\right]_{s^{-1}} = 0,$$
$$(\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

befriedigt werden; so hat man für alle Werthe von s, bei denen die Reihe für $f_\mathfrak{a}(s)$ convergirt

$$(5.)\qquad f_\mathfrak{a}(s) = \pi_\mathfrak{a}(s)\overline{f_\mathfrak{a}}(s),$$

wo $\overline{f_\mathfrak{a}}(s)$ eine als unendliche Reihe von derselben Form wie die für $f_\mathfrak{a}(s)$ darstellbare Function bedeutet. Nun darf man aber in dieser Gleichung $(-s)$ für s setzen, und erhält

$$f_\mathfrak{a}(s)\, f_\mathfrak{a}(-s) = \pi_\mathfrak{a}(s)\, \pi_\mathfrak{a}(-s)\, \overline{f_\mathfrak{a}}(s)\, \overline{f_\mathfrak{a}}(-s),$$

oder da

$$\boldsymbol{M}_\mathfrak{a}(-s) = \boldsymbol{M}_\mathfrak{a}(s),\quad \boldsymbol{N}_\mathfrak{a}(-s) = \boldsymbol{N}_\mathfrak{a}(s),\quad \boldsymbol{R}_\mathfrak{a}(-s) = -\boldsymbol{R}_\mathfrak{a}(s),$$

ist,

$$\boldsymbol{N}_\mathfrak{a}^2(s) - \boldsymbol{M}_\mathfrak{a}^2(s)\, \boldsymbol{R}_\mathfrak{a}^2(s) = \pi_\mathfrak{a}(s)\pi_\mathfrak{a}(-s)\, \overline{f_\mathfrak{a}}(s)\overline{f_\mathfrak{a}}(-s),$$

oder auch, indem

$$\boldsymbol{R}_\mathfrak{a}^2(s) = \frac{\boldsymbol{P}_\mathfrak{a}(s)}{\boldsymbol{Q}_\mathfrak{a}(s)}$$

ist, durch Multiplication dieser Gleichung mit $-\boldsymbol{Q}_\mathfrak{a}(s)$

$$(5.)\qquad \boldsymbol{P}_\mathfrak{a}(s)\boldsymbol{M}_\mathfrak{a}^2(s) - \boldsymbol{Q}_\mathfrak{a}(s)\boldsymbol{N}_\mathfrak{a}^2(s) = \pi_\mathfrak{a}(s)\pi_\mathfrak{a}(-s)\, \chi_\mathfrak{a}(s),$$

wo

$$\chi_\mathfrak{a}(s) = -\boldsymbol{Q}_\mathfrak{a}(s)\, \overline{f_\mathfrak{a}}(s)\overline{f_\mathfrak{a}}(-s)$$

gesetzt ist. Nun gehört jeder Werth von s, der $\pi_\mathfrak{a}(s) = 0$ oder $\pi_\mathfrak{a}(-s) = 0$ macht, zu denen, für welche die Reihen-Entwicklungen von $f_\mathfrak{a}(s)$, $f_\mathfrak{a}(-s)$ und somit auch die von $\overline{f_\mathfrak{a}}(s)$, $\overline{f_\mathfrak{a}}(-s)$, $\chi_\mathfrak{a}(s)$ convergiren; es behält daher der Quotient

$$\frac{\boldsymbol{P}_\mathfrak{a}(s)\, \boldsymbol{M}_\mathfrak{a}^2(s) - \boldsymbol{Q}_\mathfrak{a}(s)\, \boldsymbol{N}_\mathfrak{a}^2(s)}{\pi_\mathfrak{a}(s)\, \pi_\mathfrak{a}(-s)}$$

auch dann noch einen endlichen Werth, wenn der Divisor verschwindet; und da Dividendus und Divisor desselben beide ganze Functionen von s^2 sind, so muß der erstere durch den letzteren theilbar, und somit $\chi_{\mathfrak{a}}(s)$ ebenfalls eine ganze Function von s^2 sein. Daraus folgt denn, daß die Gleichung (5.) für *jeden* Werth von s besteht. Setzt man nun in derselben

$$\frac{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{a}})}(x - a_{\mathfrak{a}}) \quad \text{für} \quad s^2,$$

so geht der Ausdruck auf der linken Seite in

$$\boldsymbol{P}(x)\,\boldsymbol{M}^2(x) - \boldsymbol{Q}(x)\,\boldsymbol{N}^2(x),$$

und

$$\pi_{\mathfrak{a}}(s)\,\pi_{\mathfrak{a}}(-s) = (s^2 - s_{\mathfrak{a}}'^2)(s^2 - s_{\mathfrak{a}}''^2)\cdots,$$

abgesehen von einem constanten Factor, in

$$(x - x_{\mathfrak{a}}')(x - x_{\mathfrak{a}}'')\cdots(x - x_{\mathfrak{a}}^{(2\mu)})$$

über, während sich $\chi_{\mathfrak{a}}(s)$ ebenfalls in eine ganze Function von x verwandelt. Demnach wird, wenn die Gleichungen (4.) sämmtlich bestehen, der Ausdruck

$$\boldsymbol{P}(x)\,\boldsymbol{M}^2(x) - \boldsymbol{Q}(x)\,\boldsymbol{N}^2(x) \quad \text{durch} \quad \varPi(x)$$

theilbar, und es gilt die Gleichung (4.) des §. 2. Die Anzahl dieser Gleichungen ist aber $(2\mu\varrho)$, d. h. gleich der Anzahl der Coefficienten von $\boldsymbol{M}(x)$, $\boldsymbol{N}(x)$ und sie werden daher zur Bestimmung der letzteren hinreichen.

Nun hat die Reihe

$$\left[\frac{1}{\pi_{\mathfrak{a}}(s)}\right] \quad \text{die Form}$$

(6.) $$s^{-2\mu}(1 + \sigma_{\mathfrak{a},1}s^{-1} + \sigma_{\mathfrak{a},2}s^{-2} + \cdots) = \underset{\mathfrak{n}=0\ldots\infty}{\mathbf{S}}\left(\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}}\,s^{-2\mu-\mathfrak{n}}\right),$$

wo $\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}}$ eine ganze homogene und symmetrische Function $\mathfrak{n}$ten Grades von

$$s_{\mathfrak{a}}', \quad s_{\mathfrak{a}}'', \quad \ldots, \quad s_{\mathfrak{a}}^{(2\mu)}$$

bedeutet. Setzt man daher

(7.) $$f_{\mathfrak{a}}(s) = \boldsymbol{F}_{\mathfrak{a},0} + \boldsymbol{F}_{\mathfrak{a},1}s + \boldsymbol{F}_{\mathfrak{a},2}s^2 + \cdots = \underset{\mathfrak{m}=0\ldots\infty}{\mathbf{S}\boldsymbol{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m}}s^{\mathfrak{m}}},$$

wo die Ausdrücke $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{a},0}$, $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{a},1}$ u. s. w. lineare Functionen von

$$\begin{array}{cccc} \boldsymbol{M}_1, & \boldsymbol{M}_2, & \ldots, & \boldsymbol{M}_{\mu\varrho}, \\ \boldsymbol{N}_1, & \boldsymbol{N}_2, & \ldots, & \boldsymbol{N}_{\mu\varrho} \end{array}$$

sind, mit Coefficienten, die rational aus $a_{\mathfrak{a}}$ und den Coefficienten von $\boldsymbol{P}(x)$ und $\boldsymbol{R}(x)$ zusammengesetzt werden, so wird

$$(8.)\qquad \left[\frac{s^{2\mu-\mathfrak{p}-1}f_{\mathfrak{a}}(s)}{\pi_{\mathfrak{a}}(s)}\right] = \underset{\mathfrak{m}=0\ldots\infty,\ \mathfrak{n}=0\ldots\infty}{\mathbf{S}}\left\{\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}}\,\boldsymbol{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{m}}\,s^{\mathfrak{m}-\mathfrak{n}-\mathfrak{p}-1}\right\},$$

$$(9.)\qquad \left[\frac{s^{2\mu-\mathfrak{p}-1}f_{\mathfrak{a}}(s)}{\pi_{\mathfrak{a}}(s)}\right]_{s^{-1}} = \underset{\mathfrak{n}=0\ldots\infty}{\mathbf{S}}\left\{\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}}\,\boldsymbol{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}+\mathfrak{n}}\right\},$$

und man erhält demnach, indem man $\mathfrak{p} = 0, 1, \ldots, 2\mu-1$ setzt, zur Bestimmung der Coefficienten von $\boldsymbol{M}(x)$, $\boldsymbol{N}(x)$ die $(2\mu\varrho)$ Gleichungen, welche durch die folgende

$$(10.)\qquad \boldsymbol{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}} + \underset{\mathfrak{n}=1\ldots\infty}{\mathbf{S}}\left\{\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}}\,\boldsymbol{F}_{\mathfrak{a},\mathfrak{p}+\mathfrak{n}}\right\} = 0 \qquad \begin{pmatrix} \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, \varrho \\ \mathfrak{p} = 0, 1, \ldots, 2\mu-1 \end{pmatrix}$$

repräsentirt werden. Diese kann man durch Zusammenziehung der Glieder, welche dieselbe Unbekannte enthalten, auf die Form

$$(11.)\qquad \begin{aligned} &(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_0 + (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_1\boldsymbol{M}_1 + \cdots + (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mu\varrho}\boldsymbol{M}_{\mu\varrho} \\ &\qquad + (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mu\varrho+1}\boldsymbol{N}_1 + \cdots + (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{2\mu\varrho}\boldsymbol{N}_{\mu\varrho} = 0 \end{aligned}$$

bringen, wo die Ausdrücke $(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_0$, $(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_1$ u. s. w. sämmtlich Reihen von der Form

$$g_0 + g_1\sigma_{\mathfrak{a},1} + g_2\sigma_{\mathfrak{a},2} + \cdots$$

sind. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{M}_{\mathfrak{m}}$ die Determinante des Systems, welches aus

dem folgenden

$$
(12.)\quad
\begin{array}{cccc}
(0) & (1) & \dots & (2\mu\varrho) \\
\end{array}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{llll}
(1,0)_0 & (1,0)_1 & \dots & (1,0)_{2\mu\varrho} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
(1,2\mu-1)_0 & (1,2\mu-1)_1 & \dots & (1,2\mu-1)_{2\mu\varrho} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
(\varrho,0)_0 & (\varrho,0)_1 & \dots & (\varrho,0)_{2\mu\varrho} \\
(\varrho,1)_0 & (\varrho,1)_1 & \dots & (\varrho,1)_{2\mu\varrho} \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
(\varrho,2\mu-1)_0 & (\varrho,2\mu-1)_1 & \dots & (\varrho,2\,\mu-1)_{2\mu\varrho}
\end{array}
\right\}
$$

dadurch sich ergiebt, daß man die mit $(\mathfrak{m})$ bezeichnete Vertikal-Reihe fortläßt, und zugleich die darauf folgenden, ohne ihre Aufeinanderfolge zu ändern, vor die mit (0) überschriebenen setzt; so erhält man

$$
(13.)\quad
\begin{cases}
\boldsymbol{M}_1 = \dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_0}, & \boldsymbol{M}_2 = \dfrac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_0}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{M}_{\mu\varrho} = \dfrac{\mathfrak{M}_{\mu\varrho}}{\mathfrak{M}_0}, \\[2ex]
\boldsymbol{N}_1 = \dfrac{\mathfrak{M}_{\mu\varrho+1}}{\mathfrak{M}_0}, & \boldsymbol{N}_2 = \dfrac{\mathfrak{M}_{\mu\varrho+2}}{\mathfrak{M}_0}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{N}_{\mu\varrho} = \dfrac{\mathfrak{M}_{2\mu\varrho}}{\mathfrak{M}_0},
\end{cases}
$$

wo $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$ u. s. w. als rationale und ganze aus $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p})_0$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p})_1$ u. s. w. gebildete Ausdrücke gleich den letztern nach ganzen positiven Potenzen der Größen

$$
(14.)\quad
\begin{cases}
s'_1, & s'_2, \quad \dots, \quad s'_\varrho \\
s''_1, & s''_2, \quad \dots, \quad s''_\varrho \\
\dots & \dots \\
s^{(2\mu)}_1, & s^{(2\mu)}_2, \quad \dots, \quad S^{(2\mu)}_\varrho
\end{cases}
$$

in convergirende Reihen entwickelt werden können*). Hier ist es nun von besonderer Wichtigkeit, die Anfangsglieder dieser Reihen, d. h. die Werthe, welche sie annehmen, wenn die Größen (14.) sämmtlich verschwinden, zu ermitteln. Offenbar erhält man dieselben, die mit

$$
\overset{0}{\mathfrak{M}}_0, \quad \overset{0}{\mathfrak{M}}_1, \quad \dots, \quad \overset{0}{\mathfrak{M}}_{2\mu\varrho}
$$

*) Vergl. den Satz (5, B, §. 7) in der angeführten Abhandlung über die Facultäten.

bezeichnet werden mögen, wenn man bei der Bildung von $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$ u. s. w. die Reihen für $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p})_0$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{p})_1$ u. s. w. auf ihre Anfangsglieder reducirt, oder, was dasselbe ist, wenn man die Gleichungen (11.), die mit den unter (10.) aufgestellten identisch sind, durch die folgenden ersetzt

$$(15.)\qquad \boldsymbol{F}_{\mathfrak{a},0} = 0, \quad \boldsymbol{F}_{\mathfrak{a},1} = 0, \quad \dots, \quad \boldsymbol{F}_{\mathfrak{a},2\mu-1} = 0, \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots, \varrho)$$

und dann aus den Coefficienten derselben $\overset{0}{\mathfrak{M}}_0$, $\overset{0}{\mathfrak{M}}_1$, u. s. w. so zusammensetzt, wie $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$ u. s. w. aus den Coefficienten der Gleichungen (11.).

Nun sind aber $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{a},0}, \boldsymbol{F}_{\mathfrak{a},1}$, u. s. w. die Coefficienten der Reihen-Entwicklung von

$$f_{\mathfrak{a}}(s) = \boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}(s)\,\boldsymbol{R}_{\mathfrak{a}}(s) + \boldsymbol{N}_{\mathfrak{a}}(s),$$

und die Gleichungen (15.) drücken also aus, daß die (2μ) ersten Glieder derselben verschwinden sollen. Dies kann, da $\boldsymbol{N}_{\mathfrak{a}}(s)$ und $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}(s)$ gerade Functionen von s sind, $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{a}}(s)$ aber eine ungerade, in deren Entwicklung der Coefficient von s^1 nicht Null ist, nur unter der Bedingung geschehen, daß in den Entwicklungen von $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}(s)$ und $\boldsymbol{N}_{\mathfrak{a}}(s)$ nach Potenzen von s alle Glieder von einer niedrigern als der (2μ)ten Ordnung verschwinden. Da aber $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}(s)$ und $\boldsymbol{N}_{\mathfrak{a}}(s)$ aus $\boldsymbol{M}(x)$ und $\boldsymbol{N}(x)$ durch die Substitution

$$x = a_{\mathfrak{a}} + \frac{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{a}})} s^2$$

hervorgehn, so muß man, damit die genannten Glieder Null werden,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}(a_{\mathfrak{a}}) = 0, \quad \boldsymbol{M}'(a_{\mathfrak{a}}) = 0, \quad \dots, \quad \boldsymbol{M}^{(\mu-1)}(a_{\mathfrak{a}}) = 0, \\ \boldsymbol{N}(a_{\mathfrak{a}}) = 0, \quad \boldsymbol{N}'(a_{\mathfrak{a}}) = 0, \quad \dots, \quad \boldsymbol{N}^{(\mu-1)}(a_{\mathfrak{a}}) = 0 \end{aligned}$$

haben, d. h. es müssen $\boldsymbol{M}(x)$, $\boldsymbol{N}(x)$ beide durch $(x - a_{\mathfrak{a}})^{\mu}$ theilbar sein. Hiernach sagen die Gleichungen (15.) aus, es sollen die Coefficienten von $\boldsymbol{M}(x)$ und $\boldsymbol{N}(x)$ so bestimmt werden, daß beide durch

$$(x - a_1)^{\mu}(x - a_2)^{\mu} \cdots (x - a_{\varrho})^{\mu} = \boldsymbol{P}^{\mu}(x)$$

theilbar werden. Dies kann aber, da $\boldsymbol{M}(x)$ vom $(\mu\varrho)$ten, $\boldsymbol{N}(x)$ vom $(\mu\varrho - 1)$ten Grade, und der Coefficient von $x^{\mu\varrho}$ in $\boldsymbol{M}(x)$ der Einheit gleich sein soll, nicht anders geschehen, als wenn man

$$\boldsymbol{N}_1 = 0, \quad \boldsymbol{N}_2 = 0, \quad \dots, \quad \boldsymbol{N}_{\mu\varrho} = 0,$$

und

$$\boldsymbol{M}(x) = \boldsymbol{P}^{\mu}(x)$$

annimmt. Hiernach liefern die Gleichungen (15.) für $\boldsymbol{M}_1$, $\boldsymbol{N}_1$, $\boldsymbol{M}_2$, $\boldsymbol{N}_2$ u. s. w. völlig bestimmte endliche Werthe. Daraus folgt zunächst, daß $\overset{0}{\mathfrak{M}}_0$ oder das Anfangsglied von $\mathfrak{m}_0$ nicht Null sein kann, indem, wenn dieses der Fall wäre, die Gleichungen (15.) entweder *gar nicht*, oder auf *mehr als eine* Weise befriedigt werden könnten; und daher ergiebt sich

$$(16.)\qquad \begin{cases} \overset{0}{\mathfrak{M}}_0 x^{\mu\varrho} + \overset{0}{\mathfrak{M}}_1 x^{\mu\varrho-1} + \cdots + \overset{0}{\mathfrak{M}}_{\mu\varrho} = \overset{0}{\mathfrak{M}}_0 \boldsymbol{P}^{\mu}(x), \\ \overset{0}{\mathfrak{M}}_{\mu\varrho+1} = \overset{0}{\mathfrak{M}}_{\mu\varrho+2} = \cdots = \overset{0}{\mathfrak{M}}_{2\mu\varrho} = 0. \end{cases}$$

Mithin kann man, wenn man

$$\frac{\mathfrak{M}_0}{\overset{0}{\mathfrak{M}}} = \boldsymbol{M}_0$$

setzt, $\boldsymbol{M}(x)$ und $\boldsymbol{N}(x)$ auf die Form

$$(18.)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{M}(x) = \boldsymbol{P}^{\mu}(x) + \dfrac{\mathfrak{M}(x)}{\boldsymbol{M}_0}, \\ \boldsymbol{N}(x) = \dfrac{\mathfrak{N}(x)}{\boldsymbol{M}_0} \end{cases}$$

bringen, wo jetzt $\mathfrak{M}(x)$, $\mathfrak{N}(x)$ ganze Functionen des $(2\mu\varrho - 1)$ten Grades von x bedeuten, deren Coefficienten sich gleich wie $\boldsymbol{M}_0$ nach ganzen positiven Potenzen der Größen (14.) in convergirende Reihen entwickeln lassen. Dabei reducirt sich $\boldsymbol{M}_0$ auf die Einheit, wenn diese Größen sämmtlich den Werth Null annehmen, während die Coefficienten von $\mathfrak{M}(x)$ und $\mathfrak{N}(x)$ dann ebenfalls sämmtlich verschwinden.

Hierzu bemerke ich noch Folgendes. Die Formel (7.) lehrt, indem

$$f_{\mathfrak{a}}(s) = \boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}(s)\,\boldsymbol{R}_{\mathfrak{a}}(s) + \boldsymbol{N}_{\mathfrak{a}}(s)$$

und $\boldsymbol{N}_{\mathfrak{a}}(s)$ eine gerade, $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{a}}(s)\,\boldsymbol{R}_{\mathfrak{a}}(s)$ eine ungerade Function von s ist, daß für einen *geraden* Werth von $\mathfrak{m}$

$$F_{\mathfrak{a},\mathfrak{m}} \quad \text{die Form} \quad f_1\boldsymbol{N}_1 + f_2\boldsymbol{N}_2 + \cdots + f_{\mu\varrho}\boldsymbol{N}_{\mu\varrho},$$

und für einen *ungeraden*

$$F_{\mathfrak{a},\mathfrak{m}} \quad \text{die Form} \quad f_0 + f_1\boldsymbol{M}_1 + f_2\boldsymbol{M}_2 + \cdots + f_{\mu\varrho}\boldsymbol{M}_{\mu\varrho},$$

hat. Ferner ist $\sigma_{\mathfrak{a},\mathfrak{n}}$ eine gerade oder ungerade Function von $s'_{\mathfrak{a}}, s''_{\mathfrak{a}}, \ldots, s^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}}$, jenachdem $\mathfrak{n}$ eine gerade oder ungerade Zahl ist. Aus der Gleichung (10.) folgt daher, daß

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_0 \qquad (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_1 \qquad \ldots \quad (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mu\varrho} \quad \textit{gerade,}$$

und

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mu\varrho+1} \quad (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mu\varrho+2} \quad \ldots \quad (\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{2\mu\varrho} \quad \textit{ungerade}$$

Functionen der eben genannten Größen sind, wenn $\mathfrak{p}$ eine *ungerade* Zahl ist; daß sich dies aber umgekehrt verhält, sobald $\mathfrak{p}$ *gerade* ist. Es ändert sich also jeder Coefficient der Gleichungen (11.) gar nicht, oder wechselt nur sein Zeichen, wenn man $s'_{\mathfrak{a}}, s''_{\mathfrak{a}}, \ldots, s^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}}$ in

$$-s'_{\mathfrak{a}},\ -s''_{\mathfrak{a}},\ \ldots,\ -s^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}}$$

verwandelt; und zwar geht dadurch, wenn man mit

$$\overline{\mathfrak{m}} \quad \text{die Zahl 0 oder 1}$$

bezeichnet, je nachdem $\mathfrak{m} \leqq \mu\varrho$ oder $\mathfrak{m} > \mu\varrho$ ist,

$$(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}} \quad \text{in} \quad (-1)^{\mathfrak{p}-1+\overline{\mathfrak{m}}}(\mathfrak{a},\mathfrak{p})_{\mathfrak{m}}$$

über. Der Ausdruck $\mathfrak{M}_{\mathfrak{m}}$ ist nun ein Aggregat von Gliedern, deren jedes die Form

$$\pm(\mathfrak{a}_1,\mathfrak{p}_1)_{\mathfrak{m}_1}(\mathfrak{a}_2,\mathfrak{p}_2)_{\mathfrak{m}_2}\cdots(\mathfrak{a}_\lambda,\mathfrak{p}_\lambda)_{\mathfrak{m}_\lambda}$$

hat, wo $\lambda = 2\mu\varrho$ ist und die Reihe der Indices $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_\lambda$ sämmtliche Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, 2\mu\varrho$ enthält, mit Ausnahme von $\mathfrak{m}$, während für

$$\mathfrak{a}_1,\mathfrak{p}_1 \quad \mathfrak{a}_2,\mathfrak{p}_2 \quad \ldots \quad \mathfrak{a}_\lambda,\mathfrak{p}_\lambda$$

die in der folgenden Zusammenstellung enthaltenen Verbindungen zu setzen sind:

$$\begin{array}{llll} 1,\ 0 & 1,\ 1 & \ldots & 1,\ 2\mu-1, \\ 2,\ 0 & 2,\ 1 & \ldots & 2,\ 2\mu-1, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varrho,\ 0 & \varrho,\ 1 & \ldots & \varrho,\ 2\mu-1. \end{array}$$

Giebt man daher jeder der unter (14.) zusammengestellten Größen den entgegengesetzten Werth, so erfährt das vorstehende Product dadurch dieselbe Veränderung als wenn es mit

$$(-1)^{\mathfrak{p}_1-1+\mathfrak{p}_2-1+\cdots+\mathfrak{p}_\lambda-1+\overline{\mathfrak{m}}_1+\overline{\mathfrak{m}}_2+\cdots+\overline{\mathfrak{m}}_\lambda}$$

multiplicirt wird. Aber

$$\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2+\cdots+\mathfrak{p}_\lambda = \varrho\big(0+1+2+\cdots+(2\mu-1)\big) = \mu\varrho(2\mu-1),$$
$$\overline{\mathfrak{m}}_1+\overline{\mathfrak{m}}_2+\cdots+\overline{\mathfrak{m}}_\lambda = \overline{0}+\overline{1}+\cdots+(\overline{2\mu\varrho})-\overline{\mathfrak{m}} = \mu\varrho-\overline{\mathfrak{m}},$$

und daher

$$(-1)^{\mathfrak{p}_1-1+\cdots+\mathfrak{p}_\lambda-1+\overline{\mathfrak{m}}_1+\cdots+\overline{\mathfrak{m}}_\lambda} = (-1)^{2\mu\varrho(\mu-1)-\overline{\mathfrak{m}}} = (-1)^{\overline{\mathfrak{m}}}.$$

Man sieht also, daß die Glieder von $\mathfrak{M}_\mathfrak{m}$ nach der Zeichenänderung der Größen (14.) sämmtlich unverändert bleiben, wenn $\mathfrak{m} \lesseqgtr \mu\varrho$, und nur ihr Zeichen wechseln, wenn $\mathfrak{m} > \mu\varrho$; d. h. mit andern Worten, daß

$$\mathfrak{M}_0, \quad \mathfrak{M}_1, \quad \ldots, \quad \mathfrak{M}_{\mu\varrho}$$

und somit auch $\boldsymbol{M}_0$ und die Coefficienten von $\mathfrak{M}(x)$ *gerade*, dagegen die Coefficienten von $\mathfrak{N}(x)$ *ungerade* Functionen der genannten Größen sind.

Hierdurch ist nun die Zusammensetzungsweise der Functionen $\boldsymbol{M}(x)$, $\boldsymbol{N}(x)$ für den vorliegenden Zweck hinlänglich festgestellt. Aus denselben kann man ferner die Function $\varphi(x)$ leicht erhalten.

Da der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (4, §. 2) durch $\Pi(x)$ theilbar ist, $\Pi(x)$ aber die Form

$$x^{\mu\varrho}+\mathfrak{P}_1x^{\mu\varrho-1}+\cdots+\mathfrak{P}_{\mu\varrho}$$

hat, wo $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ u. s. w. ganze Functionen von x_1', x_1'' u. s. w. und somit auch der Quadrate von s_1', s_2'' u. s. w. sind, von denen, nachdem man den gedachten Ausdruck durch $\Pi(x)$ dividirt, in dem Quotienten nur ganze positive Potenzen vorkommen; so sieht man, daß man

$$\varphi(x) = x^\varrho + \frac{\boldsymbol{P}^{(1)}}{\boldsymbol{M}_0^2}x^{\varrho-1} + \frac{\boldsymbol{P}^{(2)}}{\boldsymbol{M}_0^2}x^{\varrho-2} + \cdots + \frac{\boldsymbol{P}^{(\varrho)}}{\boldsymbol{M}_0^2} \tag{18.}$$

erhalten muß, wo $\boldsymbol{P}^{(1)}$, $\boldsymbol{P}^{(2)}$, …, $\boldsymbol{P}^{(\varrho)}$ ganz dieselbe Gestalt haben wie die Coefficienten von $\mathfrak{M}(x)$.

Man kann aber dieser Function noch eine andere, sehr bemerkenswerthe Form geben. Setzt man nämlich in der Gleichung (4, §. 2)

$$x = a_{\mathfrak{a}}, \quad a_{\varrho+\mathfrak{a}}, \quad a_{2\varrho+1},$$

so erhält man

$$(19.)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi(a_{\mathfrak{a}})}{-\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{a}})} = \dfrac{\boldsymbol{N}^2(a_{\mathfrak{a}})}{\Pi(a_{\mathfrak{a}})} = \dfrac{\mathfrak{N}^2(a_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{M}_0^2\Pi(a_{\mathfrak{a}})}, \\ \dfrac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{P}(a_{\varrho+\mathfrak{a}})} = \dfrac{\boldsymbol{M}^2(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{\Pi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})} = \dfrac{\left(\boldsymbol{M}_0\, \boldsymbol{P}^{\mu}(a_{\varrho+\mathfrak{a}}) + \mathfrak{M}(a_{\varrho+\mathfrak{a}})\right)^2}{\boldsymbol{M}_0^2\, \Pi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}, \\ \dfrac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{\boldsymbol{P}(a_{2\varrho+1})} = \dfrac{\boldsymbol{M}^2(a_{2\varrho+1})}{\Pi(a_{2\varrho+1})} = \dfrac{\left(\boldsymbol{M}_0\, \boldsymbol{P}^{\mu}(a_{2\varrho+1}) + \mathfrak{M}(a_{2\varrho+1})\right)^2}{\boldsymbol{M}_0^2\, \Pi(a_{2\varrho+1})}. \end{cases}$$

Nun ist

$$\frac{1}{(a_{\mathfrak{a}} - x'_{\mathfrak{a}})(a_{\mathfrak{a}} - x''_{\mathfrak{a}}) \cdots (a_{\mathfrak{a}} - x^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}})} = \left\{\left(\frac{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{a}})}\right)^{\mu} \cdot \frac{1}{s'_{\mathfrak{a}} s''_{\mathfrak{a}} \cdots s^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}}}\right\}^2,$$

und, wenn $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$ verschieden,

$$\frac{1}{(a_{\mathfrak{a}} - x'_{\mathfrak{b}})(a_{\mathfrak{a}} - x''_{\mathfrak{b}}) \cdots (a_{\mathfrak{a}} - x^{(2\mu)}_{\mathfrak{b}})}$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{a_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}}\right)^{\mu} \left(1 - \frac{x'_{\mathfrak{b}} - a_{\mathfrak{b}}}{a_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdots \left(1 - \frac{x^{(2\mu)}_{\mathfrak{b}} - a_{\mathfrak{b}}}{a_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}^2.$$

Aber

$$\left(1 - \frac{x'_{\mathfrak{b}} - a_{\mathfrak{b}}}{a_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \left(1 - \frac{x''_{\mathfrak{b}} - a_{\mathfrak{b}}}{a_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{u. s. w.}$$

sind, weil $x'_{\mathfrak{b}}$, $x''_{\mathfrak{b}}$ u. s. w. sämmtlich in der Nähe von $a_{\mathfrak{b}}$ sich befinden, nach ganzen positiven Potenzen von $(x'_{\mathfrak{b}} - a_{\mathfrak{b}})$, $(x''_{\mathfrak{b}} - a_{\mathfrak{b}})$ u. s. w., und somit auch von $s'^2_{\mathfrak{b}}$, $s''^2_{\mathfrak{b}}$ u. s. w. in convergirende Reihen entwickelbar. Folglich kann man

$$\frac{1}{\Pi(a_{\mathfrak{a}})} = \frac{1}{\boldsymbol{Q}^{2\mu}(a_{\mathfrak{a}})}\left(\frac{\mathbf{S}_{\mathfrak{a}}}{s'_{\mathfrak{a}}\, s''_{\mathfrak{a}} \ldots s^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}}}\right)^2$$

setzen, wo $\mathbf{S}_\mathfrak{a}$ eine convergirende, nur ganze positive und gerade Potenzen der Größen (14.) enthaltende Reihe bedeutet. In ähnlicher Weise findet man

$$\frac{1}{\Pi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})} = \frac{\mathbf{S}^2_{\varrho+\mathfrak{a}}}{P^{2\mu}(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}, \qquad \frac{1}{\Pi(a_{2\varrho+1})} = \frac{\mathbf{S}^2_{2\varrho+1}}{P^{2\mu}(a_{2\varrho+1})},$$

wo $\mathbf{S}_{\varrho+\mathfrak{a}}$, $\mathbf{S}_{2\varrho+1}$ Reihen von ähnlicher Gestalt wie $\mathbf{S}_\mathfrak{a}$ bedeuten.

Aus (19.) ergiebt sich nun

$$\frac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{-Q(a_\mathfrak{a})} = \left(\frac{\mathfrak{N}(a_\mathfrak{a})\mathbf{S}_\mathfrak{a}}{Q^\mu(a_\mathfrak{a})\, s'_\mathfrak{a} \cdots s^{(2\mu)}_\mathfrak{a} M_0}\right)^2,$$

und aus (18.)

$$\frac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{-Q(a_\mathfrak{a})} = \frac{\varphi^{(\mathfrak{a})}}{M_0^2},$$

wo $\varphi^{(\mathfrak{a})}$ eine nur ganze positive Potenzen von s'_1, s''_1, u. s. w. enthaltende Reihe bezeichnet. Mithin muß

$$\varphi^{(\mathfrak{a})} = \left(\frac{\mathfrak{N}(a_\mathfrak{a})\mathbf{S}_\mathfrak{a}}{Q^\mu(a_\mathfrak{a})\, s'_\mathfrak{a} \cdots s^{(2\mu)}_\mathfrak{a}}\right)^2,$$

und daher $\mathfrak{N}(a_\mathfrak{a})\mathbf{S}_\mathfrak{a}$ durch $s'_\mathfrak{a} \ldots s^{(2\mu)}_\mathfrak{a}$ theilbar sein. Bemerkt man nun, daß $\mathfrak{N}(a_\mathfrak{a})$ eine ungerade, $\mathbf{S}_\mathfrak{a}$, $(s'_\mathfrak{a} \ldots s^{(2\mu)}_\mathfrak{a})$, M_0, $\mathfrak{M}(a_{\varrho+\mathfrak{a}})$, $\mathfrak{M}(a_{2\varrho+1})$ aber gerade Functionen der Größen (14.) sind, so erkennt man, daß man

$$(20.)\quad \begin{cases} \dfrac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{-Q(a_\mathfrak{a})} = \left\{\dfrac{\mathbf{S}^{(\mathfrak{a})}_1 + \mathbf{S}^{(\mathfrak{a})}_3 + \cdots + \mathbf{S}^{(\mathfrak{a})}_{2\mathfrak{m}-1} + \cdots}{1 + \mathbf{S}^{(0)}_2 + \cdots + \mathbf{S}^{(0)}_{2\mathfrak{m}} + \cdots}\right\}^2 = \varphi^2_\mathfrak{a}, \\[2ex] \dfrac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{P(a_{\varrho+\mathfrak{a}})} = \left\{\dfrac{\mathbf{S}^{(\varrho+\mathfrak{a})}_0 + \mathbf{S}^{(\varrho+\mathfrak{a})}_2 + \cdots + \mathbf{S}^{(\varrho+\mathfrak{a})}_{2\mathfrak{m}} + \cdots}{1 + \mathbf{S}^{(0)}_2 + \cdots + \mathbf{S}^{(0)}_{2\mathfrak{m}} + \cdots}\right\}^2 = \varphi^2_{\varrho+\mathfrak{a}}, \\[2ex] \dfrac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})} = \left\{\dfrac{\mathbf{S}^{(2\varrho+1)}_0 + \mathbf{S}^{(2\varrho+1)}_2 + \cdots + \mathbf{S}^{(2\varrho+1)}_{2\mathfrak{m}} + \cdots}{1 + \mathbf{S}^{(0)}_2 + \cdots + \mathbf{S}^{(0)}_{2\mathfrak{m}} + \cdots}\right\}^2 = \varphi^2_{2\varrho+1}. \end{cases} \qquad (\ddagger)$$

hat, wo $\mathbf{S}_{\mathfrak{m}}^{(\mathfrak{r})}$ eine ganze homogene Function $\mathfrak{m}$ten Grades der Größen

$$(21.)\qquad \begin{cases} s_1', & s_1'', & \ldots, & s_1^{(2\mu)} \\ s_2', & s_2'', & \ldots, & s_2^{(2\mu)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_\varrho', & s_\varrho'', & \ldots, & s_\varrho^{(2\mu)} \end{cases}$$

bezeichnen soll. Es ist aber

$$(22.)\qquad \frac{\varphi(x)}{\boldsymbol{P}(x)} = 1 + \sum \frac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{(x-a_\mathfrak{a})\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{a})};$$

und so erhält man

$$(23.)\qquad \varphi(x) = \boldsymbol{P}(x) - \sum \left\{ \frac{\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{a})}{\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{a})} \cdot \frac{\boldsymbol{P}(x)}{x-a_\mathfrak{a}} \varphi_\mathfrak{a}^2 \right\}.$$

Drückt man nun die Größen (21.) durch die folgenden

$$(24.)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{u}_1', & \boldsymbol{u}_1'', & \ldots, & \boldsymbol{u}_1^{(2\mu)} \\ \boldsymbol{u}_2', & \boldsymbol{u}_2'', & \ldots, & \boldsymbol{u}_2^{(2\mu)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{u}_\varrho', & \boldsymbol{u}_\varrho'', & \ldots, & \boldsymbol{u}_\varrho^{(2\mu)} \end{cases}$$

aus (vermittelst der Formeln (4.) des §. 1), so erhält man

$$(25.)\qquad \begin{cases} \varphi_\mathfrak{a} = \sqrt{\dfrac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{-\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{a})}} = \dfrac{\boldsymbol{U}_1^{(\mathfrak{a})} + \boldsymbol{U}_3^{(\mathfrak{a})} + \cdots + \boldsymbol{U}_{2\mathfrak{m}-1}^{(\mathfrak{a})} + \cdots}{1 + \boldsymbol{U}_2^{(0)} + \cdots + \boldsymbol{U}_{2\mathfrak{m}}^{(0)} + \cdots} \\[2ex] \varphi_{\varrho+\mathfrak{a}} = \sqrt{\dfrac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{P}(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}} = \dfrac{\boldsymbol{U}_0^{(\varrho+\mathfrak{a})} + \boldsymbol{U}_2^{(\varrho+\mathfrak{a})} + \cdots + \boldsymbol{U}_{2\mathfrak{m}}^{(\varrho+\mathfrak{a})} + \cdots}{1 + \boldsymbol{U}_2^{(0)} + \cdots + \boldsymbol{U}_{2\mathfrak{m}}^{(0)} + \cdots} \\[2ex] \varphi_{2\varrho+1} = \sqrt{\dfrac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{\boldsymbol{P}(a_{2\varrho+1})}} = \dfrac{\boldsymbol{U}_0^{(2\varrho+1)} + \boldsymbol{U}_2^{(2\varrho+1)} + \cdots + \boldsymbol{U}_{2\mathfrak{m}}^{(2\varrho+1)} + \cdots}{1 + \boldsymbol{U}_2^{(0)} + \cdots + \boldsymbol{U}_{2\mathfrak{m}}^{(0)} + \cdots} \end{cases}$$

---

‡) $\dfrac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{P}(a_\mathfrak{a})} = \left\{ \dfrac{\mathbf{S}_0^{(\varrho+\mathfrak{a})} + \mathbf{S}_2^{(\varrho+\mathfrak{a})} + \cdots + \mathbf{S}_{2\mathfrak{m}}^{(\varrho+\mathfrak{a})} + \cdots}{1 + \mathbf{S}_2^{(0)} + \cdots + \mathbf{S}_{2\mathfrak{m}}^{(0)} + \cdots} \right\}^2 = \varphi_{\varrho+\mathfrak{a}}^2$ im Text.

$$(26.)\quad \begin{cases} M(x) = P^{\mu}(x) + \dfrac{U_2(x) + \cdots + U_{2\mathfrak{m}}(x) + \cdots}{1 + U_2^{(0)} + \cdots + U_{2\mathfrak{m}}^{(0)} + \cdots}, \\[2ex] N(x) = \dfrac{U_1(x) + \cdots + U_{2\mathfrak{m}+1}(x) + \cdots}{1 + U_2^{(0)} + \cdots + U_{2\mathfrak{m}}^{(0)} + \cdots}, \end{cases}$$

wo jetzt $U_{\mathfrak{m}}^{(\mathfrak{r})}$, $U_{\mathfrak{m}}(x)$ ganze homogene Functionen $\mathfrak{m}$ten Grades der Größen (24.) sind, die zweite aber zugleich auch eine ganze Function $\big((\mu\varrho - 1)$ten Grades$\big)$ von x ist, und sämmtliche in diesen Ausdrücken vorkommenden unendlichen Reihen unbedingt convergiren, sobald die absoluten Werthe der genannten Veränderlichen unterhalb der oben für sie festgesetzten Gränzen liegen.*) Dabei kann man bemerken, daß die Coefficienten von $U_{\mathfrak{m}}^{(\mathfrak{r})}$ und $U_{\mathfrak{m}}(x)$ aus a_1, $a_2, \ldots, a_\varrho$, und den Coefficienten von $Q(x)$ rational zusammengesetzt sind, wie man leicht sieht, wenn man die vorhergehenden Entwicklungen in dieser Beziehung überblickt.

§. 4.

Nachdem nun ermittelt worden, welche Gestalt die Coefficienten von $M(x)$, $N(x)$, $\varphi(x)$, als Functionen von u_1', u_1'' u. s. w. betrachtet, haben†) , kehre ich zu den Gleichungen (8.) des §. 2. zurück.

---

*) Wenn $F(s_1, s_2, \ldots)$ eine Function mehrerer veränderlichen Größen $s_1, s_2, \ldots$ ist, die für alle Werthe derselben, die ihrem absoluten Betrage nach unter gewissen Gränzwerthen $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2, \ldots$ liegen, durch eine convergirende Reihe von der Form

$$\underset{\mathfrak{n}_1 = 0 \ldots \infty,\ \mathfrak{n}_2 = 0 \ldots \infty, \ldots}{\mathbf{S}} \left\{ A(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots) s_1^{\mathfrak{n}_1} s_2^{\mathfrak{n}_2} \cdots \right\}$$

dargestellt werden kann; und man substituirt für $s_1, s_2, \ldots$ ebenso gebildete Potenz-Reihen beliebig vieler anderer Veränderlichen $u_1, u_2, \ldots$, und ordnet nach Potenzen dieser letztern; so convergirt die so sich ergebende Reihe, sobald man für die absoluten Werthe von $u_1, u_2, \ldots$ solche Gränzen festsetzt, daß nicht nur die Reihen für $s_1, s_2, \ldots$ sämmtlich convergent sind, sondern ihre Summen auch zu denjenigen Werthen von $s_1, s_2, \ldots$ gehören, für welche die angegebene Darstellung von $F(s_1, s_2, \ldots)$ gültig ist.

†) Wenn man die in Rede stehenden Größen direct durch Auflösung der Gleichungen (3, §. 2) bestimmen, und in den so sich ergebenden Formeln $x_1', x_1'', \ldots \sqrt{R(x_1')}, \sqrt{R(x_1'')}, \ldots$ durch u_1', $u_1'', \ldots$ ausdrücken wollte, so würden sie die Gestalt von Brüchen erhalten, bei denen Zähler und Nenner gleichzeitig verschwänden, sobald man in zweien oder mehreren der unter (1, §. 2) aufgestellten Reihen die gleichstelligen Glieder einander gleich setzte. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, der sich schon bei Anwendung des ***Abel***'schen Theorems zur Herleitung der sog. Additions-Formeln für die elliptischen Functionen zeigt, ist das im vorhergehenden §. auseinandergesetzte, allerdings etwas umständliche Verfahren gewählt worden. Wie man übrigens

Wenn die Größen (1.) des §. 2. sämmtlich verschwinden, so reduciren sich, nach den Formeln (25, §. 3) $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varrho$ ebenfalls sämmtlich auf Null, und daher (nach (23.) desselben §.) $\varphi(x)$ auf $\boldsymbol{P}(x)$, so daß alsdann $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ die Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ erhalten. Man kann daher $x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}$, $\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})}$ – die letztere Größe mit Hülfe der Formel (7, §. 2) – bei hinlänglich kleinen Werthen der genannten Veränderlichen nach ganzen positiven Potenzen derselben in Reihen entwickeln, die gleichzeitig mit ihnen verschwinden, und $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ als in der Nähe beziehlich von $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ liegend betrachten. Dann aber führen die Gleichungen (8, §. 2) indem man ganz denselben Weg verfolgt wie bei den Entwicklungen des §. 1., und wieder

$$\sqrt{\left(\frac{\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{a})}{\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{a})}(x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a})\right)} = s_\mathfrak{a}$$

setzt, zu den folgenden

$$\boldsymbol{u}'_\mathfrak{b} + \boldsymbol{u}''_\mathfrak{b} + \cdots \boldsymbol{u}^{(2\mu)}_\mathfrak{b} = s_\mathfrak{b} + \mathbf{S}\left\{\sum_\mathfrak{a} \frac{(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})_\mathfrak{n}}{2\mathfrak{n}+1} s_\mathfrak{a}^{2\mathfrak{n}+1}\right\} \quad (\mathfrak{b} = 1, \ldots, \varrho),$$
$$\mathfrak{n} = 1 \ldots \infty$$

$$\frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})}}{\boldsymbol{Q}(x_\mathfrak{a})} = s_\mathfrak{a} + (\mathfrak{a})_1 s_\mathfrak{a}^3 + \cdots,$$

und man sieht daher, daß man, unter der Voraussetzung, es seien nicht nur $\boldsymbol{u}'_\mathfrak{a}, \boldsymbol{u}''_\mathfrak{a}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(2\mu)}_\mathfrak{a}$, sondern auch $\boldsymbol{u}'_\mathfrak{a} + \boldsymbol{u}''_\mathfrak{a} + \cdots + \boldsymbol{u}^{(2\mu)}_\mathfrak{a}$ dem absoluten Betrage nach kleiner als $\boldsymbol{U}_\mathfrak{a}$, durch Auflösung der Gleichung $\varphi(x) = 0$ und Anwendung der Formel (7, §. 2) zu denselben Werthen von $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$, $\sqrt{\boldsymbol{R}(x_1)}$, $\sqrt{\boldsymbol{R}(x_2)}$, $\ldots$, $\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho)}$ gelangen muß, die man für diese Größen vermittelst der Formeln (4, 5, §. 1) erhält, wenn man in diesen

$$\begin{array}{lcc}
\boldsymbol{u}'_1 + \boldsymbol{u}''_1 + \cdots + \boldsymbol{u}^{(2\mu)}_1 & \text{an die Stelle von} & \boldsymbol{u}_1 \\
\boldsymbol{u}'_2 + \boldsymbol{u}''_2 + \cdots + \boldsymbol{u}^{(2\mu)}_2 & - \; - \; - \; - & \boldsymbol{u}_2 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
\boldsymbol{u}'_\varrho + \boldsymbol{u}''_\varrho + \cdots + \boldsymbol{u}^{(2\mu)}_\varrho & - \; - \; - \; - & \boldsymbol{u}_\varrho
\end{array}$$

---

die Gleichungen (3, §. 2), auch ohne $\sqrt{\boldsymbol{R}(x'_1)}$, $\sqrt{\boldsymbol{R}(x''_1)}$, $\ldots$ in unendliche Reihen aufzulösen, so umformen kann, daß derselbe Zweck erreicht wird, soll für den besonders wichtigen Fall, wo $\mu = 1$ ist, später gezeigt werden.

setzt. Aus den so eben angeführten Formeln erhält man ferner

$$
(1.)\quad \begin{cases}
\sqrt{\dfrac{(a_\mathfrak{a}-x_1)(a_\mathfrak{a}-x_2)\dots(a_\mathfrak{a}-x_\varrho)}{-\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{a})}} \\
\quad = \boldsymbol{u}_\mathfrak{a} + (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_\varrho)_3^{(\mathfrak{a})} + \dots + (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_\varrho)_{2\mathfrak{m}-1}^{(\mathfrak{a})} + \dots, \\
\sqrt{\dfrac{(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-x_1)(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-x_2)\dots(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-x_\varrho)}{\boldsymbol{P}(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}} \\
\quad = 1 + (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_\varrho)_2^{(\varrho+\mathfrak{a})} + \dots + (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(\varrho+\mathfrak{a})} + \dots, \\
\sqrt{\dfrac{(a_{2\varrho+1}-x_1)(a_{2\varrho+1}-x_2)\dots(a_{2\varrho+1}-x_\varrho)}{\boldsymbol{P}(a_{2\varrho+1})}} \\
\quad = 1 + (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_\varrho)_2^{(2\varrho+1)} + \dots + (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(2\varrho+1)} + \dots,
\end{cases}
$$

wo wieder $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\mathfrak{m}^{(\mathfrak{r})}$ eine homogene ganze Function $\mathfrak{m}$ten Grades von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_\varrho$ bedeutet, deren Coefficienten aus denen von $\boldsymbol{Q}(x)$, und aus $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$ rational zusammengesetzt sind. Macht man nun in diesen Ausdrücken die angegebene Substitution, so ersieht man aus der Vergleichung der so hervorgehenden Formeln mit den unter (25.) des vorhergehenden §. aufgestellten, wenn man die letztern nach Potenzen von $\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_1''$, u. s. w. sich entwickelt denkt, daß

$$\boldsymbol{U}_1^{(\mathfrak{a})} = \pm(\boldsymbol{u}_\mathfrak{a}' + \boldsymbol{u}_\mathfrak{a}'' + \dots + \boldsymbol{u}_\mathfrak{a}^{(2\mu)}), \quad \boldsymbol{U}_0^{(\varrho+\mathfrak{a})} = \pm 1, \quad \boldsymbol{U}_0^{(2\varrho+1)} = \pm 1$$

sein muß. Setzt man nun fest, es solle jeder der Wurzelgrößen

$$\sqrt{\frac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{-\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{a})}}, \quad \sqrt{\frac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{P}(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}}, \quad \sqrt{\frac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{\boldsymbol{P}(a_{2\varrho+1})}}$$

von den beiden Werthen, die sie haben kann, derjenige beigelegt werden, bei dem in den vorstehenden Formeln die obern Zeichen gelten, so sind dieselben jetzt als völlig bestimmte eindeutige Functionen von $\boldsymbol{u}_1', \boldsymbol{u}_1''$ u. s. w. zu betrachten, welche bei hinlänglich kleinen Werthen dieser Veränderlichen mit

den unter (1.) aufgestellten übereinstimmen, wofern man in den letztern

$$
\begin{aligned}
u_1 &= u_1' + u_1'' + \cdots + u_1^{(2\mu)}\\
u_2 &= u_2' + u_2'' + \cdots + u_2^{(2\mu)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_\varphi &= u_\varphi' + u_\varphi'' + \cdots + u_\varphi^{(2\mu)}
\end{aligned}
$$

setzt.

Angenommen nun, man habe für die absoluten Werthe der veränderlichen Größen $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ irgend welche Gränzen $T_1, T_2, \ldots, T_\varrho$, die sie nicht überschreiten sollen, festgestellt, so kann man die Zahl μ so groß annehmen, daß

$$T_1 < 2\mu U_1, \quad T_2 < 2\mu U_2, \quad \ldots, \quad T_\varrho < 2\mu U_\varrho.$$

Dann darf man

$$
\begin{aligned}
u_1' &= u_1'' = \cdots = u_1^{(2\mu)} = \frac{u_1}{2\mu}\,,\\
u_2' &= u_2'' = \cdots = u_2^{(2\mu)} = \frac{u_2}{2\mu}\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_\varrho' &= u_\varrho'' = \cdots = u_\varrho^{(2\mu)} = \frac{u_\varrho}{2\mu}
\end{aligned}
$$

setzen, und es werden, wenn man die Functionen von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$, in welche dadurch die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (25.) des vorhergehenden §. sich verwandeln, mit

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_1 \quad \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_2 \quad \ldots \quad \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{2\varrho+1},$$

oder auch kürzer mit

$$\varphi(u_1, \ldots)_1 \quad \varphi(u_1, \ldots)_2 \quad \ldots \quad \varphi(u_1, \ldots)_{2\varrho+1},$$

bezeichnet, dieselben die Gestalt

$$
(2.)\quad \begin{cases}
\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{\mathfrak{a}} = \dfrac{u_{\mathfrak{a}} + \mathfrak{U}_3^{(\mathfrak{a})} + \cdots + \mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}-1}^{(\mathfrak{a})} + \cdots}{1 + \mathfrak{U}_2^{(0)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}}^{(0)} + \cdots} \\[2ex]
\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{\varrho+\mathfrak{a}} = \dfrac{1 + \mathfrak{U}_2^{(\varrho+\mathfrak{a})} + \cdots + \mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}}^{(\varrho+\mathfrak{a})} + \cdots}{1 + \mathfrak{U}_2^{(0)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}}^{(0)} + \cdots} \\[2ex]
\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{2\varrho+1} = \dfrac{1 + \mathfrak{U}_2^{(2\varrho+1)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}}^{(2\varrho+1)} + \cdots}{1 + \mathfrak{U}_2^{(0)} + \cdots + \mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}}^{(0)} + \cdots}
\end{cases}
$$

haben, in welchen Formeln $\mathfrak{U}_{\mathfrak{m}}^{(\mathfrak{r})}$ eine ganze homogene Function $\mathfrak{m}$ten Grades von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ bedeutet, und die unendlichen Reihen, welche den Nenner und die Zähler bilden, für alle Werthe von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$, die ihrem absoluten Betrage nach die Gränzen $T_1, T_2, \ldots, T_\varrho$ nicht überschreiten, unbedingt convergent sind. Für hinlänglich kleine Werthe der genannten Veränderlichen lassen sich $\varphi(u_1, \ldots)_1$, $\varphi(u_1, \ldots)_2$, u. s. w. nach ganzen positiven Potenzen derselben in convergirende Reihen entwickeln, welche mit den entsprechenden unter (1.) aufgestellten übereinstimmen.

Durch Auflösung der Gleichung

$$\varphi(x) = 0,$$

wo

$$
(3.)\quad \varphi(x) = P(x) - \sum \left\{ \frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})} \cdot \frac{P(x)}{x - a_{\mathfrak{a}}} \varphi^2(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{\mathfrak{a}} \right\}
$$

ist, und man

$$
(4.)\quad \begin{cases}
\sqrt{\dfrac{\varphi(a_{\mathfrak{a}})}{-Q(a_{\mathfrak{a}})}} = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{\mathfrak{a}} \\[2ex]
\sqrt{\dfrac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{P(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}} = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{\varrho+\mathfrak{a}} \\[2ex]
\sqrt{\dfrac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{P(a_{2\varrho+1})}} = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{2\varrho+1}
\end{cases}
$$

hat, ergeben sich sodann ϱ Größen x_1, x_2, …, x_ϱ, welche den Differential-Gleichungen

$$(5.)\qquad \begin{cases} d\boldsymbol{u}_1 = \sum \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{P}(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a_1} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})}} \\ d\boldsymbol{u}_2 = \sum \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{P}(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a_2} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\boldsymbol{u}_\varrho = \sum \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{P}(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a_\varrho} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})}} \end{cases}$$

genügen, und zugleich die Werthe a_1, a_2, …, a_ϱ annehmen, wenn $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, …, $\boldsymbol{u}_\varrho$ sämmtlich verschwinden. Die Werthe, welche die Wurzelgrößen in diesen Gleichungen haben müssen, erhält man ohne Zweideutigkeit, indem man mit

$$\boldsymbol{M}(x, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho), \quad \boldsymbol{N}(x, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)$$

die Functionen bezeichnet, in welche die Ausdrücke (26, §. 3) durch die angegebene Substitution übergehen, durch die Formel

$$(6.)\qquad \frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})}}{\boldsymbol{Q}(x_\mathfrak{a})} = \frac{\boldsymbol{N}(x_\mathfrak{a}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)}{\boldsymbol{M}(x_\mathfrak{a}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)} \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, \varrho).$$

Hierzu ist jetzt noch eine wesentliche Bemerkung zu machen. Der Nenner und die Zähler in den Ausdrücken von

$$\varphi(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_1 \quad \varphi(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_2 \quad \text{u. s. w.}$$

hängen, außer von $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, … noch von der Zahl μ ab. Gleichwohl läßt sich nachweisen, daß die Werthe dieser Functionen selbst stäts dieselben bleiben, welchen Werth man auch dieser Zahl geben möge, wenn derselbe nur groß genug genommen wird, um die in den in Rede stehenden Ausdrücken vorkommenden Reihen convergent zu machen.

Wenn nämlich $\boldsymbol{F}(u_1, u_2, \ldots)$, $\boldsymbol{G}(u_1, u_2, \ldots)$, $\boldsymbol{F}'(u_1, u_2, \ldots)$, $\boldsymbol{G}'(u_1, u_2, \ldots)$ eindeutige Functionen mehrerer Veränderlichen $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, … sind, die sich nach ganzen positiven Potenzen derselben in Reihen entwickeln lassen, und es gilt die Gleichung

$$\frac{\boldsymbol{F}(u_1, u_2, \ldots)}{\boldsymbol{G}(u_1, u_2, \ldots)} = \frac{\boldsymbol{F}'(u_1, u_2, \ldots)}{\boldsymbol{G}'(u_1, u_2, \ldots)}$$

für alle Werthe von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots,$ die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als gewisse Größen sind; so muß sie überhaupt für alle Werthe der genannten Veränderlichen bestehen, bei denen die Reihen für $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}', \boldsymbol{G}'$ sämmtlich convergiren. Denn es folgt aus ihr

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}' = \boldsymbol{G}\boldsymbol{F}',$$

und wenn diese Gleichung für beliebige unendlich kleine Werthe von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2,$ ... richtig sein soll, so müssen die Reihen, in welche $\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}'$ und $\boldsymbol{G}\boldsymbol{F}'$ nach ganzen positiven Potenzen dieser Größen entwickelbar sind, in den gleichstelligen Coefficienten übereinstimmen, woraus denn folgt, daß sie, und mit ihr auch die ursprüngliche

$$\frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{G}} = \frac{\boldsymbol{F}'}{\boldsymbol{G}'}$$

gilt, sobald nur $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots$ solche Werthe haben, daß die Entwicklungen von $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}', \boldsymbol{G}'$ sämmtlich convergent sind.

Bezeichnet man nun die Reihen, welche in dem Ausdrucke irgend einer der Functionen $\varphi(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_1$, $\varphi(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_2$ u. s. w., bei einem bestimmten Werthe von μ, den Zähler und den Nenner bilden, mit $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$, sowie mit $\boldsymbol{F}', \boldsymbol{G}'$ dieselben Reihen für irgend einen andern Werth von μ, so stimmen, nach dem oben Bemerkten, die Reihen, in welche die Brüche

$$\frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{G}}, \quad \frac{\boldsymbol{F}'}{\boldsymbol{G}'}$$

bei hinlänglich kleinen Werthen von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$ entwickelt werden können, vollständig überein, und es besteht daher die Gleichung

$$\frac{\boldsymbol{F}}{\boldsymbol{G}} = \frac{\boldsymbol{F}'}{\boldsymbol{G}'}$$

jedenfalls für alle Werthe von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$, deren absoluten Beträge kleiner als gewisse Größen sind, und somit, nach dem so eben Bewiesenen, überhaupt für diejenigen Werthe dieser Veränderlichen, bei denen die Reihen $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}', \boldsymbol{G}'$ alle vier convergiren – wodurch die Richtigkeit des Behaupteten dargethan ist.

In ähnlicher Weise läßt sich ferner zeigen, daß man nach Bestimmung von $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ auch für die Wurzelgrößen $\sqrt{\boldsymbol{R}(x_1)}, \sqrt{\boldsymbol{R}(x_2)}, \ldots, \sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho)}$ vermittelst der Formel (6.) stäts dieselben Werthe erhalte, welche Zahl μ man auch bei Bildung der Functionen $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ anwenden möge. Es ist aber bemerkenswerth, daß man aus der Function $\varphi(x)$ eine andere vom $(\varrho - 1)$ten Grade und mit Coefficienten von demselben analytischen Charakter wie die von $\varphi(x)$

selbst ableiten kann, welche jene Wurzelgrößen liefert, wenn man $x = x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ setzt.

Es werde $\dfrac{\partial\varphi(x)}{\partial x} = \varphi'(x)$ gesetzt, und nachdem man die Gleichung

$$d\boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}} = \sum_{\mathfrak{c}} \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{c}})}{x_{\mathfrak{c}} - a_{\mathfrak{b}}} \cdot \frac{dx_{\mathfrak{c}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{c}})}}$$

mit

$$\frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{(x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}})\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})}.$$

multiplicirt, auf beiden Seiten in Beziehung auf $\mathfrak{b}$ summirt. Dies giebt

$$\sum_{\mathfrak{b}} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})} \cdot \frac{d\boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}}{x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}}} = \sum_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}} \frac{1}{2} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{c}})}{(x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}})(x_{\mathfrak{c}} - a_{\mathfrak{b}})\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})} \cdot \frac{dx_{\mathfrak{c}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{c}})}}.$$

Nun ist aber

$$\frac{\varphi(x)}{(x_{\mathfrak{a}} - x)\boldsymbol{P}(x)} = \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{(x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}})(x - a_{\mathfrak{b}})\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})},$$

und daher, wenn man $x = x_{\mathfrak{c}}$ setzt,

$$\sum_{\mathfrak{b}} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{(x_{\mathfrak{c}} - a_{\mathfrak{b}})(x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}})\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})} = 0, \quad \text{wofern } \mathfrak{c} \gtrless \mathfrak{a}$$

$$\text{und } \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{(x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}})(x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}})\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})} = -\frac{\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{a}})}.$$

Hiernach reducirt sich die rechte Seite der vorhergehenden Differential-Gleichung auf

$$-\frac{1}{2} \frac{\varphi'(x_{\mathfrak{a}})\,dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}},$$

und man erhält

$$\varphi'(x_{\mathfrak{a}})\,dx_{\mathfrak{a}} = -2\sum_{\mathfrak{b}} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{a}})\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}})\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})}\, d\boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}.$$

Hieraus folgt

$$\varphi'(x_{\mathfrak{a}})\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}} = -\frac{2\varphi(a_{\mathfrak{b}})\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}})\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})},$$

$$-\sum_{\mathfrak{b}} \varphi'(x_{\mathfrak{a}})\frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}} = 2\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})} \cdot \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{(x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}})\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})}.$$

Aber

$$\frac{\varphi(x)}{\boldsymbol{P}(x)} = 1 + \sum_{\mathfrak{b}} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{(x - a_{\mathfrak{b}})\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})}\ ,$$

und daher für $x = x_{\mathfrak{a}}$

$$\sum_{\mathfrak{b}} \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{(x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}})\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})} = -1.$$

Folglich

$$\sum_{\mathfrak{b}} \varphi'(x_{\mathfrak{a}}) \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}} = 2\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}.$$

Nun ist, nach dem Vorhergehenden, $\varphi(x)$ eine eindeutige Function von x und $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$, und man hat, weil $\varphi(x_{\mathfrak{a}}) = 0$ ist,

$$\varphi'(x_{\mathfrak{a}}) \frac{\partial x_{\mathfrak{a}}}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}} = -\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}}\right)_{x = x_{\mathfrak{a}}}.$$

Somit giebt die vorhergehende Gleichung, wenn man

(7.) $$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial \boldsymbol{u}_1} + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \boldsymbol{u}_2} + \cdots + \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \boldsymbol{u}_\varrho}\right) = \psi(x)$$

setzt, wo dann $\psi(x)$ eine ganze Function $(\varrho - 1)$ten Grades von x ist, deren Coefficienten gleich denen von $\varphi(x)$ eindeutige Functionen der Größen $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{u}_\varrho$ sind,

(8.) $$\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})} = -\psi(x_{\mathfrak{a}}) \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, \varrho).$$

Da nun die Werthe der Coefficienten von $\varphi(x)$, die aus den Functionen $\varphi(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_1$, $\ldots$, $\varphi(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_\varrho$ zusammengesetzt werden, von μ unabhängig sind, so gilt dasselbe auch hinsichtlich der Coefficienten von $\varphi(x)$. Und so ist erwiesen, daß die Werthe der Größen

$$x_1, x_2, \ldots, x_\varrho,\ \sqrt{\boldsymbol{R}(x_1)}, \sqrt{\boldsymbol{R}(x_2)}, \ldots, \sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho)},$$

wenn man dieselben vermittelst der im Vorhergehenden entwickelten Formeln berechnet, nur von $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\ldots$, $\boldsymbol{u}_\varrho$, in keinerlei Weise aber von der dabei gebrauchten Zahl μ abhängen.

Die Functionen $\varphi(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_1, \varphi(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_2$, u. s. w., auf welche, der vorstehenden Darstellung nach, das ***Abel***'sche Theorem fast mit Nothwendigkeit führt,

können durch die Formeln (2.) für *alle* Werthe von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ als vollständig definirt betrachtet werden, indem man, wie auch die letztern angenommen werden mögen, stäts μ so groß wählen kann, daß die in den Ausdrücken jener Functionen vorkommenden unendlichen Reihen convergiren. Für $\varrho = 1$ gehen sie, wenn

$$\sqrt{(a_3 - a_1)A_0} \,.\, u_1 = u$$

gesetzt wird, in die *elliptischen*

$$\sin\mathrm{am}\, u \qquad \cos\mathrm{am}\, u \qquad \Delta\,\mathrm{am}\, u$$

über. Aus diesem Grunde mögen sie vorzugsweise ***„hyperelliptische oder Abel'sche Functionen der Argumente** $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$*" genannt werden. Ferner sollen, der letztern Benennung entsprechend, für dieselben von nun an die Bezeichnungen

$$\mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_1 \quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_2 \quad \cdots \quad \mathrm{al}(u_1, u_2, \ldots, u_\varrho)_{2\varrho+1},$$

oder auch kürzer

$$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1 \quad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_2 \quad \cdots \quad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{2\varrho+1}$$

gebraucht werden.*)

Durch die bisherigen Entwicklungen ist jetzt das in der Einleitung ausgesprochene, die Form des Abhängigkeitsverhältnisses, welches zwischen den Größen $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ und $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ durch die daselbst aufgestellten Differential-Gleichungen begründet ist, betreffende Theorem strenge erwiesen. Dasselbe möge, in noch bestimmterer Weise gefaßt, hier wiederholt und mit einer übersichtlichen Zusammenstellung der wichtigsten Formeln verbunden werden.

---

*) Die Form, welche ich in der vorliegenden Abhandlung den ***Abel***'schen Functionen gegeben habe, stimmt nicht ganz mit derjenigen überein, in welcher sie der frühern, im 47sten Bande des *Crelle*'schen Journals abgedruckten, aufgestellt sind. Die letztere dürfte, an sich betrachtet, einige Vorzüge haben; ich habe sie aber geändert, um den nicht unwesentlichen Vortheil zu erreichen, daß jede ***Abel***'sche Function für $\varrho = 1$ geradezu in eine der elliptischen von der gebräuchlichen Form übergehe – was bei den dortigen $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_0$, $\mathrm{al}(u_1, \ldots)_1$, u. s. w. nicht der Fall ist, indem diese vielmehr für $\varrho = 1$ mit den von ***Abel*** in dessen erster Abhandlung über die elliptischen Transcendenten gebrauchten Formen überein kommen – und auf diese Weise die Vergleichung jedes gefundenen Resultats mit einem aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten erleichtert werde.

Es sei

$$\text{(I.)}\qquad \begin{cases} \boldsymbol{R}(x) = \boldsymbol{A}_0(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2\varrho+1}), \\ \boldsymbol{P}(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\varrho), \quad \dfrac{\partial \boldsymbol{P}(x)}{\partial x} = \boldsymbol{P}'(x), \\ \boldsymbol{Q}(x) = \boldsymbol{A}_0(x-a_{\varrho+1})(x-a_{\varrho+2})\cdots(x-a_{2\varrho+1}), \end{cases}$$

so lassen sich die Größen $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$, welche die Differential-Gleichungen

$$\text{(II.)}\qquad \begin{cases} d\boldsymbol{u}_1 = \sum \dfrac{1}{2}\, \dfrac{\boldsymbol{P}(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a_1} \cdot \dfrac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})}} \\ d\boldsymbol{u}_2 = \sum \dfrac{1}{2}\, \dfrac{\boldsymbol{P}(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a_2} \cdot \dfrac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\boldsymbol{u}_\varrho = \sum \dfrac{1}{2}\, \dfrac{\boldsymbol{P}(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a_\varrho} \cdot \dfrac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})}} \end{cases}$$

befriedigen, und zugleich die Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ annehmen, wenn $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$ sämmtlich verschwinden, als die Wurzeln einer Gleichung ϱten Grades betrachten, welcher man die Form

$$\text{(III.)}\qquad \sum \left\{ \frac{\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{a})}{\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{a})} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\mathfrak{a}}{x - a_\mathfrak{a}} \right\} = 1$$

geben kann. In dieser bedeuten

$$\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_1 \quad \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_2 \quad \ldots \quad \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\varrho$$

eindeutige Functionen der unbeschränkt veränderlichen Argumente $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$, welche für alle innerhalb irgend eines endlichen Bereichs liegenden Werthe dieser Größen in der Form

$$\text{(IV.)}\qquad \begin{cases} \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_1 = \dfrac{\boldsymbol{u}_1 + (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_3^{(1)} + \cdots + (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_{2\mathfrak{m}-1}^{(1)} + \cdots}{1 + (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_2^{(0)} + \cdots + (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(0)} + \cdots}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\varrho = \dfrac{\boldsymbol{u}_\varrho + (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_3^{(\varrho)} + \cdots + (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_{2\mathfrak{m}-1}^{(\varrho)} + \cdots}{1 + (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_2^{(0)} + \cdots + (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(0)} + \cdots}, \end{cases}$$

wo durch $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)^{(\mathfrak{r})}_{\mathfrak{m}}$ *eine homogene ganze Function* $\mathfrak{m}$*ten Grades bezeichnet wird, dargestellt werden können.*

Setzt man ferner

(V.) $$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_\varrho) = \varphi(x),$$

wo denn

(VI.) $$\varphi(x) = \boldsymbol{P}(x) - \sum \left\{ \frac{\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{a})}{\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{a})} \cdot \frac{\boldsymbol{P}(x)}{x - a_\mathfrak{a}} \operatorname{al}^2(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\mathfrak{a} \right\}$$

und

(VII.) $$\sqrt{\frac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{-\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{a})}} = \sqrt{\frac{(a_\mathfrak{a} - x_1)(a_\mathfrak{a} - x_2) \cdots (a_\mathfrak{a} - x_\varrho)}{-\boldsymbol{A}_0(a_\mathfrak{a} - a_{\varrho+1}) \cdots (a_\mathfrak{a} - a_{2\varrho+1})}} = \operatorname{al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\mathfrak{a}$$ (‡)

ist, und

(VIII.) $$\sum \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \boldsymbol{u}_\mathfrak{a}} = \psi(x),$$

oder, indem man

(IX.) $$\frac{\partial \operatorname{al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\mathfrak{a}}{\partial \boldsymbol{u}_1} + \cdots + \frac{\partial \operatorname{al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\mathfrak{a}}{\partial \boldsymbol{u}_\varrho} \quad \textit{mit} \quad \overline{\operatorname{al}}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\mathfrak{a}$$

bezeichnet,

(X.) $$\psi(x) = \sum \left\{ \frac{-\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{a})}{\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{a})} \cdot \frac{\boldsymbol{P}(x)}{x - a_\mathfrak{a}} \operatorname{al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\mathfrak{a} \overline{\operatorname{al}}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\mathfrak{a} \right\},$$

so giebt die Formel

(XI.) $$\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})} = -\psi(x_\mathfrak{a})$$

nach Bestimmung von $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ *diejenigen Werthe der Wurzelgrößen* $\sqrt{\boldsymbol{R}(x_1)}$, $\sqrt{\boldsymbol{R}(x_2)}, \ldots, \sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho)}$, *welche diesen in den obigen Differential-Gleichungen* (II.) *bei-*

---

‡) $\sqrt{\frac{\varphi(a_\mathfrak{a})}{-\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{a})}} = \sqrt{\frac{(a_\mathfrak{a} - x_1)(a_\mathfrak{a} - x_2) \cdots (x_\mathfrak{a} - x_\varrho)}{-\boldsymbol{A}_0(a_\mathfrak{a} - a_{\varrho+1}) \cdots (a_\mathfrak{a} - a_{2\varrho+1})}} = \operatorname{al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\mathfrak{a}$ im Text.

gelegt werden müssen. Weiter hat man

$$\text{(XII.)}\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\varphi(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{P}(a_{\varrho+\mathfrak{a}})}} = \sqrt{\dfrac{(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-x_1)(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-x_2)\cdots(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-x_\varrho)}{(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-a_1)(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-a_2)\cdots(a_{\varrho+\mathfrak{a}}-a_\varrho)}} \\ \qquad = \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_{\varrho+\mathfrak{a}}, \\ \sqrt{\dfrac{\varphi(a_{2\varrho+1})}{\boldsymbol{P}(a_{2\varrho+1})}} = \sqrt{\dfrac{(a_{2\varrho+1}-x_1)(a_{2\varrho+1}-x_2)\cdots(a_{2\varrho+1}-x_\varrho)}{(a_{2\varrho+1}-a_1)(a_{2\varrho+1}-a_2)\cdots(a_{2\varrho+1}-a_\varrho)}} \\ \qquad = \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_{2\varrho+1}, \end{cases}$$

wo $\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_{\varrho+1},\ldots,\ \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_{2\varrho+1}$ *Functionen derselben Art wie* $\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_1$ *u. s. w. sind, die sich in der Form*

$$\text{(XIII.)}\quad \begin{cases} \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_{\varrho+1} \\ = \dfrac{1+(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_2^{(\varrho+1)}+\cdots+(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(\varrho+1)}+\cdots}{1+(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_2^{(0)}+\cdots+(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(0)}+\cdots}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_{2\varrho+1} \\ = \dfrac{1+(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_2^{(2\varrho+1)}+\cdots+(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(2\varrho+1)}+\cdots}{1+(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_2^{(0)}+\cdots+(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_{2\mathfrak{m}}^{(0)}+\cdots} \end{cases}$$

darstellen lassen, wo der Nenner derselbe ist wie in den Ausdrücken (IV.). Diesen Formeln füge ich noch die folgenden hinzu.

Bezeichnet man mit α irgend eine der Zahlen $1,2,\ldots,2\varrho+1$, und setzt

$$\text{(XIV.)}\quad -\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{a}}) = l_{\mathfrak{a}},\quad \boldsymbol{P}(a_{\varrho+\mathfrak{a}}) = l_{\varrho+\mathfrak{a}},\quad \boldsymbol{P}(a_{2\varrho+1}) = l_{2\varrho+1},$$

$$\text{(XV.)}\quad \frac{\partial\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_\alpha}{\partial \boldsymbol{u}_1}+\cdots+\frac{\partial\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_\alpha}{\partial \boldsymbol{u}_\varrho} = \overline{\mathrm{al}}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_\alpha,$$

so ist

$$\text{(XVI.)}\quad \begin{cases} \varphi(a_\alpha) = l_\alpha\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_\alpha, \\ \psi(a_\alpha) = l_\alpha\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_\alpha\,\overline{\mathrm{al}}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_\alpha, \end{cases}$$

so daß man auch, wenn $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ ϱ verschiedene Werthe von α sind, und

(XVII.) $$(x - a_{\alpha_1}) \cdots (x - a_{\alpha_\varrho}) = \boldsymbol{R}_1(x)$$

gesetzt wird,

(XVIII.) $$\begin{cases} \varphi(x) = \boldsymbol{R}_1(x) + \sum \left\{ \dfrac{l_\alpha}{\boldsymbol{R}_1'(a_\alpha)} \cdot \dfrac{\boldsymbol{R}_1(x)}{x - a_\alpha} \operatorname{al}^2(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\alpha \right\}, \\ \qquad\qquad \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho \\ \psi(x) = \sum \left\{ \dfrac{l_\alpha}{\boldsymbol{R}_1'(a_\alpha)} \cdot \dfrac{\boldsymbol{R}_1(x)}{x - a_\alpha} \operatorname{al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\alpha \, \overline{\operatorname{al}}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\alpha \right\}, \\ \qquad\qquad \alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho \end{cases}$$

hat.

Ferner ist, indem

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \sum \frac{\psi(x_\mathfrak{a})}{(x - x_\mathfrak{a})\, \varphi'(x_\mathfrak{a})}, \quad \text{wo} \quad \varphi'(x) = \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x},$$

in Folge (X, XVI.)

(XIX.) $$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \sum \frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})}}{(x_\mathfrak{a} - x)\, \varphi'(x_\mathfrak{a})},$$

(XX.) $$\frac{\overline{\operatorname{al}}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\alpha}{\operatorname{al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_\alpha} = \sum \frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})}}{(x_\mathfrak{a} - a_\alpha)\, \varphi'(x_\mathfrak{a})}.$$

Nun ist oben bei Herleitung der Gleichung (8.) gefunden worden

$$\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial \boldsymbol{u}_\mathfrak{b}} \right)_{x = x_\mathfrak{a}} = -\varphi'(x_\mathfrak{a}) \frac{\partial x_\mathfrak{a}}{\partial \boldsymbol{u}_\mathfrak{b}} = \frac{2\varphi(a_\mathfrak{b}) \sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})}}{(x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{b}) \boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{b})} = -\frac{2\varphi(a_\mathfrak{b}) \psi(x_\mathfrak{a})}{(x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{b}) \boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{b})}.$$

woraus man schließt, daß für jeden Werth von x

(XXI.) $$\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \boldsymbol{u}_\mathfrak{b}} = \frac{\psi(a_\mathfrak{b})\, \varphi(x) - \varphi(a_\mathfrak{b})\, \psi(x)}{(x - a_\mathfrak{b}) \boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{b})}$$

ist, indem die beiden einander gleichgesetzten Ausdrücke ganze Functionen $(\varrho - 1)$ten Grades von x sind, welche für ϱ Werthe dieser Größe, $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$, der vorstehenden Formel gemäß übereinstimmen, also identisch sein müssen.

Aus dieser Gleichung folgt, wenn man die durch (XIX.) gegebenen Ausdrücke von $\psi(a_{\mathfrak{b}})$ und $\psi(x)$ substituirt

$$\text{(XXII.)} \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}} = -\frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})\,\varphi(x)}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})}\sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}}-x)(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}})\,\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}\right\}.$$

Ferner, wenn man $x = a_\alpha$ setzt,

$$\text{(XXIII.)} \quad \frac{\partial\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_\alpha}{\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_\alpha \partial \boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}} = \frac{-\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{b}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})}\cdot\frac{\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_\alpha\overline{\mathrm{al}}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_{\mathfrak{b}} - \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_{\mathfrak{b}}\overline{\mathrm{al}}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_\alpha}{a_\alpha - a_{\mathfrak{b}}},$$

vorausgesetzt, daß α von $\mathfrak{b}$ verschieden sei; oder wenn man, unter der Annahme, daß $\beta \gtrless \alpha$,

$$\text{(XXIV.)} \quad \frac{\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_\alpha\,\overline{\mathrm{al}}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_\beta - \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_\beta\,\overline{\mathrm{al}}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_\alpha}{a_\alpha - a_\beta}$$

durch $\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_{\alpha\beta}$

bezeichnet, wo denn, zufolge (XX.)

$$\text{(XXV.)} \qquad \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_{\alpha\beta} = -\sum\left\{\frac{\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_\alpha\ \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_\beta\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}}-a_\alpha)(x_{\mathfrak{a}}-a_\beta)\,\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}\right\}$$

ist, und man

$$\text{(XXVI.)} \qquad \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_{\alpha\beta} = \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)_{\beta\alpha}$$

hat:

$$\text{(XXXVII.)} \qquad \frac{\partial\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_\alpha}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}} = -\frac{\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{b}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_{\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_{\alpha\mathfrak{b}}, \qquad (\mathfrak{b} \gtrless \alpha)$$

aus welcher Gleichung, wenn man $\alpha = \mathfrak{a}$ setzt und auf beiden Seiten mit $\frac{\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{a}})}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_{\mathfrak{a}}$ multiplicirt, noch

$$\text{(XXVIII.)} \qquad \frac{\partial\left(\dfrac{\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{a}})}\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_{\mathfrak{a}}\right)}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}} = \frac{\partial\left(\dfrac{\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{b}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})}\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_{\mathfrak{b}}\right)}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathfrak{a}}}$$

folgt.

Die in dem Vorstehenden eingeführten Functionen

$$\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_\alpha, \quad \overline{\mathrm{al}}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_\alpha, \quad \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_{\alpha\beta}$$

können (nach den Formeln XVI, XX, XXIV) sämmtlich algebraisch durch $x_1, x_2, \ldots, x_\varrho$ ausgedrückt werden; es müssen daher unter ihnen so viele algebraische Relationen bestehen, als Functionen vorhanden sind, weniger ϱ. Diese sollen in dem folgenden §. entwickelt und zusammengestellt werden.

§. 5.

Algebraische Relationen unter den *Abel'*schen Functionen und deren ersten Differential-Coefficienten.

Es werde der Kürze wegen

$$\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_\alpha = \boldsymbol{p}_\alpha \quad \overline{\mathrm{al}}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_\alpha = \overline{\boldsymbol{p}}_\alpha \quad \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_{\alpha\beta} = \boldsymbol{p}_{\alpha\beta}$$

gesetzt; dann gelten folgende Sätze.

I. *Durch je ϱ von den Quadraten der Größen $\boldsymbol{p}_\alpha$ können die übrigen linear ausgedrückt werden.*

Aus der Formel (XVIII.) des vorhergehenden §. folgt nämlich, wenn man $x = a_\beta$ setzt, und β nicht unter den Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ begriffen ist, mit Berücksichtigung von (XVI.)

$$\frac{l_\beta}{\boldsymbol{R}_1(a_\beta)} \cdot \boldsymbol{p}_\beta^2 = 1 - \sum_{\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho} \left\{ \frac{l_\alpha}{\boldsymbol{R}_1'(a_\alpha)} \cdot \frac{\boldsymbol{p}_\alpha^2}{a_\alpha - a_\beta} \right\}.$$

II. *Eben so können durch je ϱ von den Größen*

$$\boldsymbol{p}_\gamma^2, \quad \boldsymbol{p}_{1\gamma}^2, \quad \boldsymbol{p}_{2\gamma}^2, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{p}_{(2\varrho+1)\gamma}^2$$

(wo $\boldsymbol{p}_{\gamma\gamma}$ fortzulassen ist) die übrigen linear ausgedrückt werden, vermittelst der For-

meln

$$A_0 \boldsymbol{p}_\gamma^2 = \frac{\boldsymbol{R}'(a_\gamma)}{l_\gamma \boldsymbol{R}_1(a_\gamma)} - \sum_\alpha \left\{ \frac{l_\alpha}{\boldsymbol{R}_1'(a_\alpha)} \boldsymbol{p}_{\alpha\gamma}^2 \right\},$$

$$\begin{aligned} \frac{(a_\gamma - a_\beta)\, l_\beta}{\boldsymbol{R}_1(a_\beta)} \boldsymbol{p}_{\beta\gamma}^2 &= A_0 \boldsymbol{p}_\gamma^2 + \sum_\alpha \left\{ \frac{a_\gamma - a_\alpha}{a_\beta - a_\alpha} \cdot \frac{l_\alpha}{\boldsymbol{R}_1'(a_\alpha)} \boldsymbol{p}_{\alpha\gamma}^2 \right\} \\ &= \frac{\boldsymbol{R}'(a_\gamma)}{l_\gamma \boldsymbol{R}_1(a_\gamma)} + \sum_\alpha \left\{ \frac{a_\gamma - a_\beta}{a_\beta - a_\alpha} \cdot \frac{l_\alpha}{\boldsymbol{R}_1'(a_\alpha)} \boldsymbol{p}_{\alpha\gamma}^2 \right\}, \end{aligned}$$

in denen sich das Summenzeichen auf dieselben Werthe von α bezieht wie in (I.), und γ sowohl als β nicht unter diesen begriffen sein darf.

In Folge der Gleichung

$$\psi(x_\mathfrak{a}) = -\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})} \quad (\mathfrak{a} = 1, 2, \dots, \varrho)$$

wird die Function $\boldsymbol{R}(x) - \psi^2(x)$ für $x = x_1, x_2, \dots, x_\varrho$ gleich Null, und ist daher durch $\varphi(x)$ theilbar. Setzt man nun

$$\psi_\gamma(x) = \frac{\overline{\boldsymbol{p}}_\gamma\, \varphi(x) - \boldsymbol{p}_\gamma\, \psi(x)}{x - a_\gamma},$$

so wird der Zähler dieses Ausdruckes für $x = a_\gamma$ (zufolge der Formel XVI. des vorhergehenden §.) gleich Null, und es ist somit $\psi_\gamma(x)$ eine ganze Function $(\varrho - 1)$ten Grades. Dann hat man

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{p}_\gamma^2 \boldsymbol{R}(x) - (x - a_\gamma)^2 \psi_\gamma^2(x) \\ &= \boldsymbol{p}_\gamma^2 \big(\boldsymbol{R}(x) - \psi^2(x)\big) + \overline{\boldsymbol{p}}_\gamma \varphi(x) \big(2\boldsymbol{p}_\gamma \psi(x) - \overline{\boldsymbol{p}}_\gamma \varphi(x)\big), \end{aligned}$$

und es ist also der Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung ebenfalls durch $\varphi(x)$ theilbar, wie auch durch $x - a_\gamma$, so daß man setzen kann

$$\boldsymbol{p}_\gamma^2 \frac{\boldsymbol{R}(x)}{x - a_\gamma} - (x - a_\gamma)\, \psi_\gamma^2(x) = \varphi(x)\, \varphi_\gamma(x),$$

und dann $\varphi_\gamma(x)$ eine ganze Function ϱten Grades bedeutet. Nimmt man nun $x = a_\alpha$, $\alpha \gtrless \gamma$ vorausgesetzt, so ergiebt sich (zufolge Formel XVI. d. v. §.)

$$\varphi_\gamma(a_\alpha) = (a_\gamma - a_\alpha)\, l_\alpha \boldsymbol{p}_{\alpha\gamma}^2,$$

indem

$$\psi_\gamma(a_\alpha) = l_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha \boldsymbol{p}_{\alpha\gamma}$$

ist. Ferner erhält man für $x = a_\gamma$

$$\varphi_\gamma(a_\gamma) = \frac{\boldsymbol{R}'(a_\gamma)}{l_\gamma}.$$

Bemerkt man nun noch, daß der Coefficient des höchsten Gliedes von $\varphi_\gamma(x)$ gleich $\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{p}_\gamma^2$ ist, und man daher

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_\gamma(x)}{\boldsymbol{R}_1(x)} &= \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{p}_\gamma^2 + \sum_\alpha \frac{\varphi_\gamma(a_\alpha)}{(x-a_\alpha)\,\boldsymbol{R}'{}_1(a_\alpha)} \\ &= \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{p}_\gamma^2 + \sum_\alpha \frac{a_\gamma - a_\alpha}{(x-a_\alpha)} \cdot \frac{l_\alpha}{\boldsymbol{R}'{}_1(a_\alpha)}\boldsymbol{p}_{\alpha\gamma}\end{aligned}$$

hat, so ergeben sich die zu beweisenden Relationen, indem man $x = a_\gamma$ und $x = a_\beta$ setzt.

III. Aehnliche Relationen finden Statt unter den in der Reihe

$$\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_{1\gamma}, \quad \boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_{2\gamma}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{p}_{2\varrho+1}\boldsymbol{p}_{(2\varrho+1)\gamma}$$

enthaltenen Producten.

Setzt man nämlich in der Gleichung

$$\frac{\psi_\gamma(x)}{\boldsymbol{R}_1(x)} = \sum_\alpha \frac{\psi_\gamma(a_\alpha)}{(x-a_\alpha)\boldsymbol{R}_1'(a_\alpha)} = \sum_\alpha \frac{l_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha \boldsymbol{p}_{\alpha\gamma}}{(x-a_\alpha)\boldsymbol{R}_1'(a_\alpha)}$$

$x = a_\beta$, so ergiebt sich

$$\frac{l_\gamma}{\boldsymbol{R}_1(a_\beta)}\boldsymbol{p}_\beta\boldsymbol{p}_{\beta\gamma} = \sum_\alpha \frac{l_\alpha \boldsymbol{p}_\alpha \boldsymbol{p}_{\alpha\gamma}}{(a_\beta-a_\alpha)\boldsymbol{R}_1'(a_\alpha)},$$

wo hinsichtlich der Zahlen α, β, γ dasselbe gilt wie bei der vorhergehenden Nr.

IV. Unter je sechs Functionen $\boldsymbol{p}_\alpha, \boldsymbol{p}_\beta, \boldsymbol{p}_\gamma, \boldsymbol{p}_{\beta\gamma}, \boldsymbol{p}_{\gamma\alpha}, \boldsymbol{p}_{\alpha\beta}$, wo α, β, γ verschiedene Werthe haben müssen, findet die Relation

$$(a_\beta - a_\gamma)\boldsymbol{p}_\alpha\boldsymbol{p}_{\beta\gamma} + (a_\gamma - a_\alpha)\boldsymbol{p}_\beta\boldsymbol{p}_{\gamma\alpha} + (a_\alpha - a_\beta)\boldsymbol{p}_\gamma\boldsymbol{p}_{\alpha\beta} = 0,$$

oder

$$\boldsymbol{p}_{\alpha\beta} = \frac{(a_\gamma - a_\beta)\boldsymbol{p}_\alpha \boldsymbol{p}_{\beta\gamma} - (a_\gamma - a_\alpha)\boldsymbol{p}_\beta \boldsymbol{p}_{\alpha\gamma}}{(a_\alpha - a_\beta)\boldsymbol{p}_\gamma}$$

Statt.

Denn es ist (vermöge Formel XXIV. des v. §.)

$$\frac{(a_\alpha - a_\beta)\boldsymbol{p}_{\alpha\beta}}{\boldsymbol{p}_\alpha \boldsymbol{p}_\beta} = \frac{\overline{\boldsymbol{p}}_\beta}{\boldsymbol{p}_\beta} - \frac{\overline{\boldsymbol{p}}_\alpha}{\boldsymbol{p}_\alpha},$$
$$\frac{(a_\beta - a_\gamma)\boldsymbol{p}_{\beta\gamma}}{\boldsymbol{p}_\beta \boldsymbol{p}_\gamma} = \frac{\overline{\boldsymbol{p}}_\gamma}{\boldsymbol{p}_\gamma} - \frac{\overline{\boldsymbol{p}}_\beta}{\boldsymbol{p}_\beta},$$
$$\frac{(a_\gamma - a_\alpha)\boldsymbol{p}_{\gamma\alpha}}{\boldsymbol{p}_\gamma \boldsymbol{p}_\alpha} = \frac{\overline{\boldsymbol{p}}_\alpha}{\boldsymbol{p}_\alpha} - \frac{\overline{\boldsymbol{p}}_\gamma}{\boldsymbol{p}_\gamma}$$

aus welchen Gleichungen, wenn man sie durch Addition verbindet, die aufgestellte Relation sofort folgt.

***V.** Endlich ergeben sich noch folgende Gleichungen, in denen*

$$\mathfrak{a}' \quad \textit{irgend eine der Zahlen} \quad \varrho + 1, \varrho + 2, \ldots, 2\varrho + 1$$

bedeuten soll,

$$\overline{\boldsymbol{p}}_\mathfrak{a} = \sum_\mathfrak{b} \frac{\partial \boldsymbol{p}_\mathfrak{a}}{\partial \boldsymbol{u}_\mathfrak{b}} = (a_{\mathfrak{a}'} - a_\mathfrak{a})\boldsymbol{p}_{\mathfrak{a}'}\boldsymbol{p}_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} + \sum_\mathfrak{b}{}' \left\{ \frac{\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{b})}{\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{b})} \cdot \frac{a_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{b}}{a_\mathfrak{b} - a_{\mathfrak{a}'}} \boldsymbol{p}_\mathfrak{b} \boldsymbol{p}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \right\}, \quad (\mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{a})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}_\mathfrak{a}}{\partial \boldsymbol{u}_\mathfrak{a}} = (a_{\mathfrak{a}'} - a_\mathfrak{a})\boldsymbol{p}_{\mathfrak{a}'}\boldsymbol{p}_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} + \sum_\mathfrak{b}{}' \left\{ \frac{\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{b})}{\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{b})} \cdot \frac{a_\mathfrak{a} - a_{\mathfrak{a}'}}{a_\mathfrak{b} - a_{\mathfrak{a}'}} \boldsymbol{p}_\mathfrak{b} \boldsymbol{p}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \right\}, \quad (\mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{a})$$

$$\overline{\boldsymbol{p}}_{\mathfrak{a}'} = \sum_\mathfrak{b} \frac{\partial \boldsymbol{p}_{\mathfrak{a}'}}{\partial \boldsymbol{u}_\mathfrak{b}} = \sum_\mathfrak{b} \left\{ \frac{-\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{b})}{\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{b})} \boldsymbol{p}_\mathfrak{b} \boldsymbol{p}_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}} \right\}.$$

Man hat nämlich (Formel XXVII d. v. §.)

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}_{\mathfrak{a}'}}{\partial \boldsymbol{u}_\mathfrak{b}} = -\frac{\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{b})}{\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{b})} \boldsymbol{p}_\mathfrak{b} \boldsymbol{p}_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \qquad (\mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{a}).$$

Hieraus folgt, wenn man $\alpha = \mathfrak{a}'$ setzt, sofort die dritte der vorstehenden Gleichungen. Aus (VI.) aber folgt, wenn man $x = a_{\mathfrak{a}'}$ nimmt und $\mathfrak{b}$ statt $\mathfrak{a}$ schreibt,

$$p_{\mathfrak{a}'}^2 = 1 - \sum_{\mathfrak{b}} \left\{ \frac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})} \cdot \frac{p_{\mathfrak{b}}^2}{a_{\mathfrak{a}'} - a_{\mathfrak{b}}} \right\},$$

und hieraus, wenn man nach $u_{\mathfrak{a}}$ differentiirt,

$$p_{\mathfrak{a}'} p_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}'} = \frac{\dfrac{\partial p_{\mathfrak{a}}}{\partial u_{\mathfrak{a}}}}{a_{\mathfrak{a}'} - a_{\mathfrak{a}}} - \sum_{\mathfrak{b}}{}' \left\{ \frac{Q(a_{\mathfrak{b}})}{P'(a_{\mathfrak{b}})} \cdot \frac{p_{\mathfrak{b}} p_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{a_{\mathfrak{a}'} - a_{\mathfrak{b}}} \right\}, \qquad (\mathfrak{b} \gtrless \mathfrak{a}),$$

woraus sich die zweite Gleichung ergiebt, aus der dann weiter die erste folgt.

***VI**. Von den vorstehenden Relationen mögen nun die folgenden besonders hervorgehoben werden, in denen der Kürze wegen*

$$2\varrho + 1 \quad \text{durch} \quad \mathfrak{a}_0, \qquad \varrho + \mathfrak{a} \quad \text{durch} \quad \mathfrak{a}', \qquad \varrho + \mathfrak{b} \quad \text{durch} \quad \mathfrak{b}'$$

bezeichnet ist.

(1.) $$\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0} = 1 - \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}}{a_{\mathfrak{a}_0} - a_{\mathfrak{a}}} \right\}$$

(2.) $$\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}'} = 1 - \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}}{a_{\mathfrak{a}'} - a_{\mathfrak{a}}} \right\}$$

(3.) $$A_0 \,\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0} = \frac{Q'(a_{\mathfrak{a}_0})}{P(a_{\mathfrak{a}_0})} + \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})} \,\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}} \right\}$$

(4.) $$(a_{\mathfrak{a}_0} - a_{\mathfrak{a}'}) \,\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'}$$
$$= A_0 \,\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0} - \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \frac{a_{\mathfrak{a}_0} - a_{\mathfrak{a}}}{a_{\mathfrak{a}'} - a_{\mathfrak{a}}} \cdot \frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})} \,\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}} \right\}$$
$$= \frac{Q'(a_{\mathfrak{a}_0})}{P(a_{\mathfrak{a}_0})} - \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \frac{a_{\mathfrak{a}_0} - a_{\mathfrak{a}'}}{a_{\mathfrak{a}'} - a_{\mathfrak{a}}} \cdot \frac{Q(a_{\mathfrak{a}})}{P'(a_{\mathfrak{a}})} \,\mathrm{al}^2(u_1, \ldots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}} \right\}$$

$$\text{(5.)}\qquad \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}'}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'} = \sum_{\mathfrak{a}}\left\{\frac{\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{a})}{\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{a})}\cdot\frac{\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_\mathfrak{a}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'}}{a_\mathfrak{a}-a_{\mathfrak{a}'}}\right\}$$

$$\text{(6.)}\quad \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \frac{(a_{\mathfrak{a}_0}-a_\mathfrak{b})\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_\mathfrak{a}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}} - (a_{\mathfrak{a}_0}-a_\mathfrak{a})\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_\mathfrak{b}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}}}{a_\mathfrak{a}-a_\mathfrak{b}}$$

$$\text{(7.)}\quad \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}} = \frac{(a_{\mathfrak{a}_0}-a_\mathfrak{b})\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}'}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}} - (a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}'})\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_\mathfrak{b}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'}}{a_{\mathfrak{a}'}-a_\mathfrak{b}}$$

$$\text{(8.)}\quad \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'} = \frac{(a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{b}'})\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}'}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}'} - (a_{\mathfrak{a}_0}-a_{\mathfrak{a}'})\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{b}'}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}'}}{a_{\mathfrak{a}'}-a_{\mathfrak{b}'}}$$

$$\text{(9.)}\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_\mathfrak{a}}{\partial\boldsymbol{u}_\mathfrak{b}} &= -\frac{\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{b})}{\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{b})}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_\mathfrak{b}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \qquad (\mathfrak{b}\gtrless\mathfrak{a})\\
\frac{\partial\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0}}{\partial\boldsymbol{u}_\mathfrak{b}} &= -\frac{\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{b})}{\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{b})}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_\mathfrak{b}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{b}}\\
\frac{\partial\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}'}}{\partial\boldsymbol{u}_\mathfrak{b}} &= -\frac{\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{b})}{\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{b})}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_\mathfrak{b}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}}\\
\frac{\partial\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_\mathfrak{a}}{\partial\boldsymbol{u}_\mathfrak{a}} &= (a_{\mathfrak{a}_0}-a_\mathfrak{a})\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}}\\
&\quad -\sum_{\substack{\mathfrak{b}\\(\mathfrak{b}\gtrless\mathfrak{a})}}{}'\left\{\frac{\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{b})}{\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{b})}\cdot\frac{a_\mathfrak{a}-a_{\mathfrak{a}_0}}{a_{\mathfrak{a}_0}-a_\mathfrak{b}}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_\mathfrak{b}\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Von diesen Gleichungen gehen Nr. (1, 2, 3, 4, 5) aus (I, II, III) hervor, wenn man in diesen $\boldsymbol{R}_1(x) = \boldsymbol{P}(x)$ setzt; Nr. (6, 7, 8) sind die Relationen (IV.), wenn man $\gamma = \mathfrak{a}_0$ nimmt, und die unter Nr. (9.) finden sich unter (XXVII.) des v. §. und (V.). Sie stellen, wie man sofort übersieht, so viel Relationen unter den Functionen $\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_\alpha$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_{\alpha\beta}$ und den ersten Differential-Coefficienten von $\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_\alpha$ dar, als nöthig sind, um alle diese Größen algebraisch durch

$$\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_1 \qquad \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_2 \qquad \dots \qquad \mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\dots)_\varrho$$

(an deren Stelle je ϱ andere der Functionen $\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_\alpha$ treten könnten) auszudrücken, ohne daß in den betreffenden Formeln die Argumente $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_\varrho$ selbst vorkommen; woraus unmittelbar weiter folgt, daß auch die höheren Differential-Coefficienten der ***Abel***'schen Functionen algebraisch durch je ϱ der letztern ausdrückbar sein werden.

§. 6.

Die ***Abel***'schen Integral-Functionen.

Das Integral

$$\int\left\{\frac{\boldsymbol{F}(x_1)\,dx_1}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_1)}} + \frac{\boldsymbol{F}(x_2)\,dx_2}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_2)}} + \cdots + \frac{\boldsymbol{F}(x_\varrho)\,dx_\varrho}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho)}}\right\},$$

wo $\boldsymbol{F}(x)$ eine beliebige rationale Function von x bedeuten soll, geht, wenn man x_1, x_2, ..., x_ϱ, $\sqrt{\boldsymbol{R}(x_1)}$, $\sqrt{\boldsymbol{R}(x_2)}$, ..., $\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho)}$ vermittelst der Formeln des §. 4. durch $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$ ausdrückt, in eine Function dieser Argumente über, welche man eine „***Abel'sche Integral-Function***" derselben nennen kann, und deren analytischer Charakter jetzt näher untersucht werden soll.

Man kann, wie weiter unten wird nachgewiesen werden, jede in der vorstehenden Formel enthaltene Function auf eine einzige zurückführen, die mit

$$\mathfrak{Al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho) \quad \text{oder kürzer} \quad \mathfrak{Al}(\boldsymbol{u}_1, \ldots)$$

bezeichnet werden soll, und durch die folgende Gleichung

$$(1.) \qquad d\,\mathfrak{Al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho) = \sum \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}}{\boldsymbol{P}(a)} \cdot \frac{\boldsymbol{P}(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})}}$$

definirt wird, mit der nähern Bestimmung, daß $\mathfrak{Al}(\boldsymbol{u}_1, \ldots)$ den Werth Null erhalte, wenn $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_\varrho$ sämmtlich verschwinden. Die Constante a kann jeden beliebigen Werth haben, mit Ausnahme von a_1, a_2, ..., $a_{2\varrho+1}$, und auch das Zeichen der Wurzelgröße $\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}$ willkührlich bestimmt werden. Ist es nöthig, a in die Bezeichnung der erklärten Function mit aufzunehmen, so soll dieselbe $Al(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho;\, a)$ geschrieben werden.

Nimmt man zunächst die Größen $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, ..., $\boldsymbol{u}_\varrho$ so klein an, daß nicht nur x_1, x_2, ..., x_ϱ in der Nähe von a_1, a_2, ..., a_ϱ sich befinden, und dieselben daher, so wie $\sqrt{\boldsymbol{R}(x_1)}$, $\sqrt{\boldsymbol{R}(x_2)}$, ..., $\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho)}$ durch die unendlichen Reihen (4, 5) des §. 1. ausgedrückt werden können, sondern auch die Differenzen $x_1 - a_1$,

$x_2 - a_2, \ldots, x_\varrho - a_\varrho$ dem absoluten Betrage nach kleiner als beziehlich $a - a_1$, $a - a_2, \ldots, a - a_\varrho$ sind; so erhält man, indem

$$\frac{\boldsymbol{P}(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a} = \frac{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}}{x_\mathfrak{a} - a} \cdot \frac{\boldsymbol{P}(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}}$$

und

$$\frac{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}}{x_\mathfrak{a} - a} = \frac{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}}{a_\mathfrak{a} - a}\left\{1 + \left(\frac{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}}{a_\mathfrak{a} - a}\right) + \left(\frac{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}}{a_\mathfrak{a} - a}\right)^2 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{a}) \cdot s_\mathfrak{a}^2}{(a_\mathfrak{a} - a)\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{a})}\left\{1 + \underset{\mathfrak{m}=1\ldots\infty}{\mathbf{S}}\left(\frac{\boldsymbol{Q}(a_\mathfrak{a})}{(a - a_\mathfrak{a})\boldsymbol{P}'(a_\mathfrak{a})}\right) \cdot s_\mathfrak{a}^{2\mathfrak{m}}\right\},$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{\boldsymbol{P}(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a} - a_\mathfrak{a}} \cdot \frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})}} = \left(1 + (\mathfrak{a}, \mathfrak{a})_1 s_\mathfrak{a}^2 + (\mathfrak{a}, \mathfrak{a})_2 s_\mathfrak{a}^4 + \cdots\right) ds_\mathfrak{a} \quad (\S.\ 1.)$$

ist:

$$(2.) \qquad \mathfrak{A}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho) = \frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}}{\boldsymbol{P}(a)} \cdot \left\{\mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_5 + \cdots + \mathbf{S}_{2\mathfrak{m}+1} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}}{\boldsymbol{P}(a)} \cdot \left\{\mathfrak{U}_3 + \mathfrak{U}_5 + \cdots + \mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}+1} + \cdots\right\},$$

wo durch $\mathbf{S}_{2\mathfrak{m}+1}$ eine homogene ganze Function $(2\mathfrak{m} + 1)$ten Grades von $s_1, s_2, \ldots, s_\varrho$ und durch $\mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}+1}$ eine eben solche von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$ bezeichnet wird. Die Coefficienten von $\mathbf{S}_{2\mathfrak{m}+1}, \mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}+1}$ werden rational aus $a, a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ und den Coefficienten von $\boldsymbol{Q}(x)$ zusammengesetzt; nach fallenden Potenzen von a entwickelt, fangen $\mathbf{S}_{2\mathfrak{m}+1}, \mathfrak{U}_{2\mathfrak{m}+1}$ mit Gliedern an, die mit $a^{-\mathfrak{m}}$ multiplicirt sind.

Nun aber findet, wenn man jetzt wieder unter

$$\begin{array}{cccc}
\boldsymbol{u}'_\mathfrak{a}, & \boldsymbol{u}''_\mathfrak{a}, & \ldots, & \boldsymbol{u}_\mathfrak{a}^{(2\mu)} \\
x'_\mathfrak{a}, & x''_\mathfrak{a}, & \ldots, & x_\mathfrak{a}^{(2\mu)} \\
\sqrt{\boldsymbol{R}(x'_\mathfrak{a})}, & \sqrt{\boldsymbol{R}(x''_\mathfrak{a})}, & \ldots, & \sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a}^{(2\mu)})} \\
\boldsymbol{M}(x), & \boldsymbol{N}(x), & & \varphi(x) \\
x_\mathfrak{a}, & \sqrt{\boldsymbol{R}(x_\mathfrak{a})} & &
\end{array}$$

dieselben Größen versteht wie in §. 2, nach dem ***Abel***'schen Theoreme nicht bloß die dort unter (6.) aufgestellte Gleichung Statt, sondern auch die folgende

$$(3.)\quad \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{2}\left\{ \frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}}{\boldsymbol{P}(a)} \cdot \frac{\boldsymbol{P}(x'_{\mathfrak{a}})}{x'_{\mathfrak{a}} - a} \cdot \frac{dx'_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x'_{\mathfrak{a}})}} + \frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}}{\boldsymbol{P}(a)} \cdot \frac{\boldsymbol{P}(x''_{\mathfrak{a}})}{x''_{\mathfrak{a}} - a} \cdot \frac{dx''_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x''_{\mathfrak{a}})}} + \cdots \right\}$$

$$= \sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}}{\boldsymbol{P}(a)} \cdot \frac{\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}} - a} \cdot \frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}} \right\} + \tfrac{1}{2}\, d \log\left(\frac{\boldsymbol{M}(a)\,\boldsymbol{P}(a) + \boldsymbol{N}(a)\,\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}}{\boldsymbol{M}(a)\,\boldsymbol{P}(a) - \boldsymbol{N}(a)\,\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}} \right).$$

Werden daher

$$\boldsymbol{u}_1^{(\mathfrak{p})}, \quad \boldsymbol{u}_2^{(\mathfrak{p})}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{u}_\varrho^{(\mathfrak{p})},$$

wo $\mathfrak{p}$ irgend eine der Zahlen 1, 2, …, 2μ bezeichnet, so klein angenommen, daß die Reihen auf der rechten Seite der Gleichung (2.), wenn man darin diese Größen an die Stelle von $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho$ setzt, convergiren, so hat man

$$(4.)\quad \sum \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}}{\boldsymbol{P}(a)} \cdot \frac{\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}} - a} \cdot \frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}} \right\}$$

$$= d\,\mathfrak{Al}(\boldsymbol{u}'_1, \ldots) + d\,\mathfrak{Al}(\boldsymbol{u}''_1, \ldots) + \cdots + \tfrac{1}{2} d \log\left(\frac{\boldsymbol{M}(a)\,\boldsymbol{P}(a) - \boldsymbol{N}(a)\,\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}}{\boldsymbol{M}(a)\,\boldsymbol{P}(a) + \boldsymbol{N}(a)\,\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}} \right).$$

Jetzt setze man, wie in §. 4,

$$\boldsymbol{u}'_{\mathfrak{a}} = \boldsymbol{u}''_{\mathfrak{a}} = \cdots = \boldsymbol{u}^{(2\mu)}_{\mathfrak{a}} = \frac{\boldsymbol{u}_{\mathfrak{a}}}{2\mu},$$

und nehme μ so groß an, daß nicht nur die unendlichen Reihen, welche in den dortigen Ausdrücken von $\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_1$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_2$ u. s. w. und von $\boldsymbol{M}(x, \boldsymbol{u}_1, \ldots)$, $\boldsymbol{N}(x, \boldsymbol{u}_1, \ldots)$ vorkommen, convergent werden, sondern auch die für $\mathfrak{Al}\left(\frac{\boldsymbol{u}_1}{2\mu}, \ldots\right)$; so verwandeln sich die Größen

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_\varrho, \quad \sqrt{\boldsymbol{R}(x_1)}, \quad \sqrt{\boldsymbol{R}(x_2)}, \quad \ldots, \quad \sqrt{\boldsymbol{R}(x_\varrho)}$$

der Gleichung (4.) in die durch die Gleichungen (III, XI) des genannten §. bestimmten; und es ergiebt sich durch Integration

$$(5.)\quad \mathfrak{Al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho) = 2\mu\,\mathfrak{Al}\left(\frac{\boldsymbol{u}_1}{2\mu}, \frac{\boldsymbol{u}_2}{2\mu}, \ldots, \frac{\boldsymbol{u}_\varrho}{2\mu} \right)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \log\left(\frac{\boldsymbol{M}(a, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)\,\boldsymbol{P}(a) - \boldsymbol{N}(a, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)\,\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}}{\boldsymbol{M}(a, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)\,\boldsymbol{P}(a) + \boldsymbol{N}(a, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)\,\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}} \right).$$

Eine Constante ist nach der Integration nicht hinzuzufügen, indem die Function, deren Logarithmus in dieser Gleichung vorkommt, sich auf die Einheit reducirt, wenn u_1, u_2, $\dots u_\varrho$, sämmtlich verschwinden, wie aus den unter (26, §. 2.) gegebenen Ausdrücken von $M(x)$, $N(x)$ zu ersehen ist.

Setzt man

$$(6.)\qquad \frac{M(a,u_1,\dots)\,P(a) - N(a,u_1,\dots)\,\sqrt{R(a)}}{M(a,u_1,\dots)\,P(a) + N(a,u_1,\dots)\,\sqrt{R(a)}} \cdot e^{4\mu\,\mathfrak{Al}\left(\frac{u_1}{2\mu},\dots\right)} = \overline{\mathfrak{Al}}(u_1,u_2,\dots,u_\varrho),$$

so ist

$$(7.)\qquad \mathfrak{Al}(u_1,u_2,\dots,u_\varrho) = \tfrac{1}{2}\log\overline{\mathfrak{Al}}(u_1,u_2,\dots,u_\varrho),$$

und es bezeichnet alsdann $\overline{\mathfrak{Al}}(u_1,u_2,\dots,u_\varrho)$ eine eindeutige Function von u_1, u_2, $\dots$, u_ϱ, welche, wenn für die absoluten Werthe dieser Veränderlichen irgend welche Gränzen festgesetzt werden, die sie nicht übersteigen sollen, in der Form eines Bruches ausdrückbar ist, dessen Zähler und Nenner nach ganzen positiven Potenzen von $u_1, u_2, \dots, u_\varrho$, in convergirende Reihen sich entwickeln lassen. Für hinlänglich kleine Werthe der Argumente hat man

$$(8.)\qquad \mathfrak{Al}(u_1,u_2,\dots,u_\varrho) = e^{2(\mathfrak{U}_3+\mathfrak{U}_5+\dots+\mathfrak{U}_{2m+1}+\dots)\frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)}},$$

woraus sich leicht erweisen läßt, ganz in derselben Weise, wie dies in §. 4. für die Functionen $\varphi(u_1,\dots)_\alpha$ geschehen ist, daß der Werth von $\overline{\mathfrak{Al}}(u_1,u_2,\dots,u_\varrho)$, obwohl in dem Ausdrucke dieser Function, wie er durch die Formel (6.) gegeben ist, die Zahl μ vorkommt, dennoch von derselben ganz unabhängig ist. Man hat daher folgenden Satz:

Es giebt eine eindeutige Function $\overline{\mathfrak{Al}}(u_1,u_2,\dots,u_\varrho)$ *der unbeschränkt veränderlichen Größen* u_1, u_2, $\dots$, u_ϱ, *welche der Differential-Gleichung*

$$\tfrac{1}{2}d\log\overline{\mathfrak{Al}}(u_1,u_2,\dots,u_\varrho) = \sum\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{R(a)}}{P'(a)}\cdot\frac{P(x_\mathfrak{a})}{x_\mathfrak{a}-a}\cdot\frac{dx_\mathfrak{a}}{\sqrt{R(x_\mathfrak{a})}}\right\},$$

in der x_1, x_2, $\dots$, x_ϱ, $\sqrt{R(x_1)}$, $\sqrt{R(x_2)}$, $\dots$, $\sqrt{R(x_\varrho)}$ *die durch die Gleichungen* (III, XI) *des §. 4. bestimmten Functionen von* u_1, u_2, $\dots$, u_ϱ *sind, genügt und, wenn diese Veränderlichen sämmtlich verschwinden, den Werth* 1 *annimmt*.

Wenn nun $F(x)$ eine beliebige rationale Function von x ist, so kann man dieselbe stäts als ein Aggregat von Gliedern von der Form

$$\frac{A}{(x-a)^m} \quad\text{und}\quad Bx^{m-1}$$

darstellen, wo m eine ganze positive Zahl, und $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, a$ Constanten bedeuten. Mit Unterscheidung derjenigen Werthe von a, welche $\boldsymbol{R}(a) = 0$ machen, von denen, bei welchen dies nicht der Fall ist, kann man daher als den allgemeinsten Ausdruck von $\boldsymbol{F}(x)$ den folgenden annehmen

$$\text{(9.)} \qquad \boldsymbol{F}(x) = \sum_{\mathfrak{m}=1\dots m_1} \left\{ \frac{\overset{1}{\boldsymbol{A}}_{\mathfrak{m}}}{(x-\overset{1}{a})^{\mathfrak{m}}} \right\} + \sum_{\mathfrak{m}=1\dots m_2} \left\{ \frac{\overset{2}{\boldsymbol{A}}_{\mathfrak{m}}}{(x-\overset{2}{a})^{\mathfrak{m}}} \right\} + \cdots$$

$$= \sum_{\mathfrak{m}=1\dots n_1} \left\{ \frac{\overset{1}{\boldsymbol{B}}_{\mathfrak{m}}}{(x-a_1)^{\mathfrak{m}}} \right\} + \sum_{\mathfrak{m}=1\dots n_2} \left\{ \frac{\overset{2}{\boldsymbol{B}}_{\mathfrak{m}}}{(x-a_2)^{\mathfrak{m}}} \right\} + \cdots$$

$$= \sum_{\mathfrak{m}=1\dots n} \left\{ \boldsymbol{C}_{\mathfrak{m}}\, x^{\mathfrak{m}-1} \right\},$$

wo $m_1, m_2, \dots, n, n_1, n_2, \dots$ ganze positive Zahlen (Null ausgeschlossen) und $\overset{1}{\boldsymbol{A}}_{\mathfrak{m}}, \overset{2}{\boldsymbol{A}}_{\mathfrak{m}}, \dots, \overset{1}{\boldsymbol{B}}_{\mathfrak{m}}, \overset{2}{\boldsymbol{B}}_{\mathfrak{m}}, \dots, \boldsymbol{C}_{\mathfrak{m}}, \overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \dots$ Constanten bedeuten, und angenommen wird, daß $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \dots$ nicht zu den Größen $a_1, a_2, \dots, a_{2\varrho+1}$, den Wurzeln der Gleichung $\boldsymbol{R}(x) = 0$, gehören.

Nun ist

$$\text{(10.)} \qquad d\frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}{(x-a)^{\mathfrak{m}}} = \left(\frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{R}'(x)}{(x-a)^{\mathfrak{m}}} - \mathfrak{m} \frac{\boldsymbol{R}(x)}{(x+1)^{\mathfrak{m}+1}} \right) \frac{dx}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}$$

$$= \sum_{\mathfrak{r}=0\dots(2\varrho+1)} \left\{ \left(\frac{\mathfrak{r}}{2} - \mathfrak{m} \right) \boldsymbol{R}^{(\mathfrak{r})}(a)(x-a)^{-\mathfrak{m}+\mathfrak{r}-1} \right\} \frac{dx}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}},$$

wenn man

$$\boldsymbol{R}(x) = \sum_{\mathfrak{r}=0\dots2\varrho+1} \boldsymbol{R}^{(\mathfrak{r})}(a)(x-a)^{\mathfrak{r}}$$

setzt. Da nun $\boldsymbol{R}^{(0)}(a) = \boldsymbol{R}(a)$ ist, so übersieht man aus dieser Formel sofort, daß sich, wenn $\boldsymbol{R}(a)$ nicht Null ist, indem man $\mathfrak{m} = 1, 2, \dots, m-1$ setzt,

$$\text{(11.)} \quad \frac{dx}{(x-a)^m \sqrt{\boldsymbol{R}(x)}} \quad \text{auf die Form} \quad \left(\frac{\boldsymbol{G}_0}{x-a} + \boldsymbol{G}_1(x) \right) \frac{dx}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}} + d \,.\, \frac{\boldsymbol{G}_2(x)\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}{(x-a)^{m-1}}$$

wird bringen lassen, wo $\boldsymbol{G}_0$ eine Constante, $\boldsymbol{G}_1(x)$ und $\boldsymbol{G}_2(x)$ aber ganze Functionen von x bedeuten, die erste vom $(2\varrho-1)$ten und die zweite vom $(m-2)$ten Grade, wobei man für $m=1$, $\boldsymbol{G}_0=1$, $\boldsymbol{G}_1(x)=0$, $\boldsymbol{G}_2(x)=0$ hat.

Setzt man aber $a=a_\alpha$, so ist $\boldsymbol{R}(a)=0$, nicht aber $\left(\frac{1}{2}-\mathfrak{m}\right)\boldsymbol{R}^{(1)}(a)$, und es erhellt aus der Formel (10.), wenn man jetzt $\mathfrak{m}=1,2,\ldots,m$ nimmt, daß man

$$(12.)\qquad \frac{dx}{(x-a_\alpha)^m\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}=\frac{\boldsymbol{G}_1(x)\,dx}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}+d\,.\,\frac{\boldsymbol{G}_2(x)\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}{(x-a_\alpha)^m}$$

erhalten muß, wo $\boldsymbol{G}_1(x)$, $\boldsymbol{G}_2(x)$ wieder ganze Functionen sind, die erste vom $(2\varrho-1)$ten und die andere vom $(m-1)$ten Grade. Namentlich hat man

$$(13.)\qquad \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{R}'(a_\alpha)\,dx}{(x-a_\alpha)\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}=\left(\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{R}'(x)}{x-a_\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{R}'(a_\alpha)}{x-a_\alpha}-\frac{\boldsymbol{R}(x)}{(x-a_\alpha)^2}\right)\frac{dx}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}-d\frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}{x-a_\alpha}.$$

Ferner ist

$$d\left(x^{m-1}\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}\right)=\frac{(m-1)x^{m-2}\boldsymbol{R}(x)+\frac{1}{2}x^{m-1}\boldsymbol{R}'(x)}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}\,dx$$

oder, wenn man

$$\boldsymbol{R}(x)=\sum_{\mathfrak{r}=0\ldots2\varrho+1}\boldsymbol{A}_\mathfrak{r}x^{2\varrho+1-\mathfrak{r}}$$

setzt,

$$(14.)\qquad d\left(x^{m-1}\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}\right)=\sum_{\mathfrak{r}=0\ldots2\varrho+1}\left(\left(\varrho+m-\frac{\mathfrak{r}+1}{2}\right)\boldsymbol{A}_\mathfrak{r}x^{2\varrho+m-\mathfrak{r}-1}\right)\frac{dx}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}\,,$$

und man hat daher

$$(15.)\qquad \frac{x^{2\varrho-1+m}\,dx}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}=\frac{\boldsymbol{G}_1(x)\,dx}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}+d\left(\boldsymbol{G}_2(x)\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}\right),$$

wo gleichfalls $\boldsymbol{G}_1(x)$, $\boldsymbol{G}_2(x)$ ganze Functionen sind, die erste vom $(2\varrho-1)$ten und die andere vom $(m-1)$ten Grade.

Aus den Formeln (11, 12, 15) folgt nun sofort, daß sich

$$(16.)\qquad \frac{\boldsymbol{F}(x)\,dx}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}\quad\text{auf die Form}\quad\left(\frac{\overset{1}{\boldsymbol{G}}_0}{x-\overset{1}{a}}+\frac{\overset{2}{\boldsymbol{G}}_0}{x-\overset{2}{a}}+\cdots\right)\frac{dx}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}$$

$$+\frac{\overset{2\varrho-1}{\boldsymbol{G}}(x)\,dx}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}+d\left(\left(\boldsymbol{G}_0(x)+\frac{\boldsymbol{G}(x)}{\boldsymbol{R}_0(x)H(x)}\right)\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}\right)$$

bringen läßt, wo $\overset{1}{G}_0, \overset{2}{G}_0, \ldots$ Constanten,

$$\begin{aligned} H(x) &= (x-\overset{1}{a})^{m_1-1}(x-\overset{2}{a})^{m_2-1} \ \ldots, \\ R_0(x) &= (x-a_1)^{n_1} \ (x-a_2)^{n_2} \ \ \ldots, \end{aligned}$$

und $\overset{2\varrho-1}{G}(x)$, $G(x)$, $G_0(x)$ ganze Functionen sind, von denen die erste von nicht höherem als dem $(2\varrho-1)$ten Grade, die zweite von einem niedrigern als $R_0(x)$ $H(x)$ ist, und die dritte sich auf Null reducirt, wenn $n \leqq 2\varrho$, während sie vom $(n-2\varrho-1)$ten Grade ist, sobald $n > 2\varrho$.

Da man ferner

$$\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}} = \frac{P(x)}{P(a)} \cdot \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R(x)}} - \frac{P(x)-P(a)}{(x-a)P(a)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

hat, wo $\dfrac{P(x)-P(a)}{x-a}$ eine ganze Function $(\varrho-1)$ten Grades ist, und man, wenn $f(x)$ eine Function $(2\varrho-1)$ Grades bedeutet,

$$f(x) = f_1(x)\,P(x) + f_2(x)$$

setzen kann, wo $f_1(x)$, $f_2(x)$ beide vom $(\varrho-1)$ten Grade sind, und

$$f_2(x) = \sum \frac{f_2(a_\mathfrak{b})}{P'(a_\mathfrak{b})} \cdot \frac{P(x)}{x-a_\mathfrak{b}}$$

ist; so erhellt, daß man dem Differential $\dfrac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$ auch die Form

$$(17.) \qquad \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = F_1\frac{\sqrt{R(\overset{1}{a})}}{2P(\overset{1}{a})} \cdot \frac{P(x)}{x-\overset{1}{a}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + F_2\frac{\sqrt{R(\overset{2}{a})}}{2P(\overset{2}{a})} \cdot \frac{P(x)}{x-\overset{2}{a}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \cdots$$
$$+ \sum_{\mathfrak{b}=1\ldots\varrho}\left(\frac{1}{2}\,G_\mathfrak{b}\frac{x^{\mathfrak{b}-1}\,P(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\right) + \sum_{\mathfrak{b}=1\ldots\varrho}\left(\frac{1}{2}\,H_\mathfrak{b}\frac{P(x)}{x-a_\mathfrak{b}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}\right)$$
$$+ d\left\{\left(G_0(x) + \frac{G(x)}{R_0(x)\,H(x)}\right)\sqrt{R(x)}\right\}$$

geben kann, wo $F_1, F_2, \ldots,\ G_\mathfrak{b}, H_\mathfrak{b}$ Constanten bedeuten.

Nun folgt aus der Gleichung (1.)

(18.) $$\sum_{\mathfrak{a}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{x_{\mathfrak{a}}^{\mathfrak{b}-1} \boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{a}})\, dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}} \right\} = d \left[\frac{-\boldsymbol{P}(a)}{\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}} \mathfrak{Al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho) \right]_{a^{-\mathfrak{b}}},$$

wo $\left[\frac{-\boldsymbol{P}(a)}{\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}} \mathfrak{Al}(\boldsymbol{u}_1, \ldots) \right]_{a^{-\mathfrak{b}}}$ den Coefficienten von $a^{-\mathfrak{b}}$ in derjenigen Entwicklung der eingeklammerten Größe, welche für sehr große Werthe von a gilt, bezeichnet. Aus den Formeln (2, 6) ersieht man, daß dieser Coefficient (indem

$$\frac{\boldsymbol{N}(a, \boldsymbol{u}_1, \ldots)}{\boldsymbol{M}(a, \boldsymbol{u}_1, \ldots)} \cdot \frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}}{\boldsymbol{P}(a)} = 0 \quad \text{wird für} \quad a = \infty, \quad \text{und}$$

man daher für alle Werthe von a, die ihrem absoluten Betrage nach eine gewisse Gränze übersteigen,

$$\frac{\boldsymbol{P}(a)}{2\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}} \log\left(\frac{\boldsymbol{M}(a, \boldsymbol{u}_1, \ldots)\, \boldsymbol{P}(a) - \boldsymbol{N}(a, \boldsymbol{u}_1, \ldots) \sqrt{\boldsymbol{R}(a)}}{\boldsymbol{M}(a, \boldsymbol{u}_1, \ldots)\, \boldsymbol{P}(a) + \boldsymbol{N}(a, \boldsymbol{u}_1, \ldots) \sqrt{\boldsymbol{R}(a)}} \right)$$
$$= -\mathbf{S} \left\{ \frac{1}{2\mathfrak{m}+1} \left(\frac{\boldsymbol{N}(a, \boldsymbol{u}_1, \ldots)}{\boldsymbol{M}(a, \boldsymbol{u}_1, \ldots)} \right)^{2\mathfrak{m}+1} \left(\frac{\boldsymbol{Q}(a)}{\boldsymbol{P}(a)} \right)^{\mathfrak{m}} \right\}_{\mathfrak{m} = 0 \ldots \infty}$$

hat, so wie auch (nach (2.))

$$\frac{2\mu\, \boldsymbol{P}(a)}{\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}} \mathfrak{Al}\left(\frac{\boldsymbol{u}_1}{2\mu}, \ldots \right) = 2\mu\, \mathbf{S}\left(\mathfrak{U}\left(a, \frac{\boldsymbol{u}_1}{2\mu}, \ldots \right)_{2\mathfrak{m}+3} \right)_{\mathfrak{m} = 0 \ldots \infty},$$

und die in Beziehung auf a rationalen Functionen

$$\left(\frac{\boldsymbol{N}(a, \boldsymbol{u}_1, \ldots)}{\boldsymbol{M}(a, \boldsymbol{u}_1, \ldots)} \right)^{2\mathfrak{m}+1} \left(\frac{\boldsymbol{Q}(a)}{\boldsymbol{P}(a)} \right)^{\mathfrak{m}}, \qquad \mathfrak{U}\left(a, \frac{\boldsymbol{u}_1}{2\mu}, \cdots \right)_{2\mathfrak{m}+3},$$

wenn man sie nach fallenden Potenzen von a entwickelt, beide mit einem Gliede anfangen, welches mit $a^{-\mathfrak{m}-1}$ multiplicirt ist) *eine eindeutige ungerade Function von* $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, …, $\boldsymbol{u}_\varrho$ *ist, welche für alle Werthe dieser Größen, die ihrem absoluten Betrage nach beliebig festgesetzte Gränzen nicht überschreiten, als Quotient zweier, nach ganzen positiven Potenzen derselben entwickelbare Reihen dargestellt werden kann.*

Berücksichtigt man ferner, daß

$$\sum\left(f(x_{\mathfrak{a}})\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}\right) = -\sum f(x_{\mathfrak{a}})\psi(x_{\mathfrak{a}}),$$

wenn $f(x)$ eine beliebige rationale Function von x ist, rational durch die Coefficienten von $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ dargestellt werden kann; so ergiebt sich, wenn man

$$\text{(19.)}\qquad \left[\frac{-\boldsymbol{P}(a)}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}\,\mathfrak{Al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)\right]_{a-\mathfrak{b}} = \mathfrak{Al}^{(\mathfrak{b})}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)$$

setzt, aus (17.)

$$\text{(20.)}\qquad \int\sum\frac{\boldsymbol{F}(x_{\mathfrak{a}})\,dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}} = \boldsymbol{F}_1\,\mathfrak{Al}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho;\overset{1}{a}) + \boldsymbol{F}_2\,\mathfrak{Al}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho;\overset{2}{a}) + \cdots$$
$$+\sum\left(\boldsymbol{G}_{\mathfrak{b}}\mathfrak{Al}^{(\mathfrak{b})}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho) + H_{\mathfrak{b}}\boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}\right)$$
$$+\,\mathfrak{F}\left(\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_{\mathfrak{a}},\ \overline{\mathrm{al}}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_{\mathfrak{a}}\right),$$

wo $\mathfrak{F}$ eine rationale Function von $\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_1$, $\overline{\mathrm{al}}(\boldsymbol{u}_1,\ldots)_1$ u. s. w. bedeutet. Man sieht also, daß in der That, wie oben bemerkt worden, *eine jede Abel'sche Integral-Function auf die mit* $\mathfrak{Al}(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_\varrho)$ *bezeichnete, zurückgeführt werden kann.*

Es ist in (§. 4.) bei Herleitung der dortigen Gleichung (8.) die Formel

$$\varphi'(x_{\mathfrak{a}})\,dx_{\mathfrak{a}} = -2\sum_{\mathfrak{b}}\frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}}{(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}})\,\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})}\,d\boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}},$$

oder

$$\frac{1}{2}\,\frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}} = -\sum_{\mathfrak{b}}\frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}}{(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}})\,\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}$$

gefunden worden. Diese Gleichung werde mit $\frac{\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}}-a}$ auf beiden Seiten multiplicirt, so findet sich, wenn man dann in Beziehung auf $\mathfrak{a}$ summirt,

$$\sum\frac{1}{2}\,\frac{\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}}-a}\cdot\frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}} = -\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})}\cdot\frac{\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{a}})\,d\boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}}{(x_{\mathfrak{a}}-a)(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{b}})\,\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}\,.$$

Nun ist aber

$$\frac{\boldsymbol{P}(x)}{(x-a)\,\varphi(x)} = \frac{\boldsymbol{P}(a)}{(x-a)\,\varphi(a)} + \sum\frac{\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{a}})}{(x_{\mathfrak{a}}-a)(x_{\mathfrak{a}}-a_{\mathfrak{a}})\,\varphi'(x_{\mathfrak{a}})}\,,$$

und daher für $x = a_{\mathfrak{b}}$

$$\sum_{\mathfrak{a}} \frac{\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{a}})}{(x_{\mathfrak{a}} - a)(x_{\mathfrak{a}} - a_{\mathfrak{b}})\,\varphi'(x_{\mathfrak{a}})} = -\frac{\boldsymbol{P}(a)}{(a - a_{\mathfrak{b}})\,\varphi(a)} \,.$$

Mithin

$$\sum \frac{1}{2}\,\frac{\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}} - a} \cdot \frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}} = \sum \frac{\boldsymbol{P}(a)}{\varphi(a)} \cdot \frac{\varphi(a_{\mathfrak{b}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{b}})} \cdot \frac{d\boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}}{a - a_{\mathfrak{b}}} \,,$$

oder auch, wenn man jetzt auf der rechten Seite $\mathfrak{a}$ statt $\mathfrak{b}$ schreibt,

$$\text{(21.)} \qquad \sum \frac{1}{2}\,\frac{\boldsymbol{P}(x_{\mathfrak{a}})}{x_{\mathfrak{a}} - a} \cdot \frac{dx_{\mathfrak{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x_{\mathfrak{a}})}} = \sum \frac{\boldsymbol{P}(a)}{\varphi(a)} \cdot \frac{\varphi(a_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{a}})} \cdot \frac{d\boldsymbol{u}_{\mathfrak{a}}}{a - a_{\mathfrak{a}}}$$

$$= \frac{\sum \left\{ -\frac{\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{a}})} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}\, d\boldsymbol{u}_{\mathfrak{a}}}{a - a_{\mathfrak{a}}} \right\}}{1 - \sum \left\{ \frac{\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{a}})} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}}{a - a_{\mathfrak{a}}} \right\}}.$$

Hieraus folgt

$$\text{(22.)} \qquad \frac{\partial\, \mathfrak{Al}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathfrak{b}}} = \frac{\sqrt{\boldsymbol{R}(a)}}{(a - a_{\mathfrak{b}})\,\boldsymbol{P}(a)} \cdot \frac{\frac{-\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{b}})}{\boldsymbol{P}(a_{\mathfrak{b}})}\ \mathrm{al}^2(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_{\mathfrak{b}}}{1 - \sum \left\{ \frac{\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{a}})} \cdot \frac{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_{\mathfrak{a}}}{a - a_{\mathfrak{a}}} \right\}}.$$

Ferner ersieht man aus der Gleichung (21.), daß die partiellen Differential-Coefficienten von $\mathfrak{Al}^{(1)}(\boldsymbol{u}_1, \ldots)$, $\mathfrak{Al}^{(2)}(\boldsymbol{u}_1, \ldots)$ u. s. w. rationale und ganze Functionen von $\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_1$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_2, \ldots,$ $al(\boldsymbol{u}_1, \ldots)_\varrho$ sind. Namentlich hat man

$$\text{(23.)} \qquad \frac{\partial\, \mathfrak{Al}^{(1)}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)}{\partial \boldsymbol{u}_{\mathfrak{a}}} = \frac{\boldsymbol{Q}(a_{\mathfrak{a}})}{\boldsymbol{P}'(a_{\mathfrak{a}})}\, \mathrm{al}^2(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varrho)_{\mathfrak{a}} \,,$$

so daß man die Gleichung (III.) des §. 4, deren Wurzeln die Größen $x_1, x_2, \ldots,\ x_\varrho$ sind, auch folgendermaßen

$$\text{(24.)} \qquad \sum \left\{ \frac{\partial\, \mathfrak{Al}^{(1)}(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_\varphi)}{(x - a_{\mathfrak{a}})\,\partial \boldsymbol{u}_{\mathfrak{a}}} \right\} = 1$$

ausdrücken kann. Auf diese merkwürdige Form der in Rede stehenden Gleichung werde ich später noch zurückkommen.

Zweites Kapitel.

Einige allgemeine Betrachtungen über die Darstellung eindeutiger analytischer Functionen durch Reihen; Digression über die elliptischen Transcendenten.

§. 7.

Die im vorhergehenden Kapitel durchgeführten Untersuchungen haben hauptsächlich den Zweck, für die Functionen

$$\mathrm{al}(u_1, \ldots)_\alpha \quad \mathrm{al}(u_1, \ldots)_{\alpha\beta} \quad \mathfrak{Al}(u_1, \ldots; a) \quad \mathfrak{Al}^{(\mathfrak{a})}(u_1, \ldots),$$

durch welche sich, wie gezeigt worden ist, alle ***Abel***'schen Transcendenten ausdrücken lassen, zu einer völlig bestimmten, auf beliebige Werthe von u_1, u_2, …, u_ϱ anwendbare *Erklärung* zu führen, und die analytische Form derselben in so weit festzustellen, als hierfür und zum Behufe der weitern Entwicklungen erforderlich ist. Die in §. 4. und §. 6. gegebenen Formeln genügen für *diesen* Zweck zwar vollständig, nicht aber, wenn verlangt wird, die genannten Größen in einer ihrem wahren analytischen Charakter entsprechenden, für alle Werthe der Argumente u_1, u_2, …, u_ϱ unverändert dieselbe bleibenden Form darzustellen. Diese bleibt vielmehr noch zu ermitteln.

Der Umstand, daß die unendlichen Reihen, welche in den Formeln (IV, XIII, §. 4) und (6, §. 6) vorkommen, für um so größere Werthe von $u_1, u_2, \ldots, u_\varrho$ convergent bleiben, je größer man die Zahl μ annimmt, begründet die Vermuthung, es werde sich jede derselben, wenn $\mu = \infty$ gesetzt wird, in eine für *alle* Werthe der genannten Veränderlichen convergirende Reihe verwandeln, und sich auf diese Weise eine Darstellung der in Rede stehenden Functionen in der gesuchten Form ergeben. Es dürfte vielleicht möglich sein, durch eine genauere Untersuchung jener Reihen die Richtigkeit dieser Vermuthung strenge zu erweisen; ich gehe jedoch hierauf nicht ein, weil man, wenn es auch gelänge, dadurch noch nicht dahin kommen würde, für jede *einzelne* der beiden Functionen, als deren Quotient alsdann irgend eine ***Abel***'sche Function sich darstellen ließe, eine analytische Definition zu gewinnen. Es tritt uns hier vielmehr eine Aufgabe entgegen, welche, so viel ich weiß, noch nicht allgemein behandelt worden, und doch für die Theorie der Functionen von besonderer Wichtigkeit ist.

Die einfachsten transcendenten Functionen sind solche, welche sich nach ganzen positiven Potenzen ihrer Argumente in *beständig* convergirende Reihen entwickeln lassen und somit im Wesentlichen den Charakter der *ganzen* rationalen Functionen besitzen. Nach ihnen kommen diejenigen, welche aus mehreren

dieser Art in rationaler Weise zusammengesetzt und daher als Quotienten aus zweien dargestellt werden können. Man kann sie als transcendente Größen vom Charakter der *gebrochenen* rationalen Functionen bezeichnen.

Oftmals aber ist eine Function in der Art definirt – und so verhält es sich, der vorhergehenden Darstellung nach, mit den ***Abel'***schen – daß zwar die Möglichkeit gegeben ist, sobald jedes ihrer Argumente auf einen endlichen, übrigens beliebig groß anzunehmenden Bereich beschränkt wird, dieselbe in der Gestalt eines Bruches, dessen Zähler und Nenner nach ganzen positiven Potenzen der Argumente entwickelte Reihen sind, auszudrücken, während eine *stäts* gültig bleibende Darstellungsform noch unbekannt ist. Angenommen nun, es sei eine derartige Function durch eine (algebraische) Differential-Gleichung definirt, (oder auch im Vereine mit andern durch mehrere solche), so kann man untersuchen, ob sie vielleicht zu den gebrochenen rationalen, in dem eben erklärten Sinne, gehöre. Hierfür aber reichen die gewöhnlichen Entwicklungs-Methoden nicht aus. Es handelt sich dann darum, zu entscheiden, ob man, nachdem in die gegebene Differential-Gleichung statt der gesuchten Function ein Bruch, dessen Zähler und Nenner noch zu bestimmende Größen sind, eingeführt worden, dieselbe in zwei andere, aus denen sie wieder folgt, so zerfällt werden könne, daß die genannten Größen beide den Charakter einer ganzen Function erhalten. Dazu kann man in vielen Fällen mit Hülfe eines allgemeinen Satzes gelangen, der verdient, bei dieser Gelegenheit entwickelt zu werden.

Wenn $f(\boldsymbol{u})$ eine Function von $\boldsymbol{u}$ ist, welche durch eine nur ganze positive Potenzen dieser Veränderlichen enthaltende und beständig convergirende Reihe dargestellt werden kann, so wird der Differential-Quotient

$$\frac{\partial^\lambda \log f(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^\lambda},$$

wo λ eine ganze positive Zahl bezeichnet, nur für solche Werthe von $\boldsymbol{u}$ unendlich groß, bei denen $f(\boldsymbol{u})$ verschwindet. Es sei a einer dieser Werthe, so kann man setzen

$$f(a+k) = gk^m + g_1 k^{m+1} + \cdots,$$

wo m eine ganze positive Zahl bedeutet und g nicht Null ist, und hat also

$$\log f(a+k) = m \log k + \log g + \frac{g_1}{g} k + \cdots,$$

wo die nicht hingeschriebenen Glieder nur positive ganze Potenzen von k enthalten; woraus folgt

$$\left(\frac{\partial^\lambda \log f(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^\lambda}\right)_{\boldsymbol{u}=a+k} = m\,\frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + \{\text{Glieder mit nur positiven ganzen Potenzen von } k\},$$

welche Reihe convergirt, sobald der absolute Betrag von k kleiner ist als eine gewisse Größe, auf deren nähere Bestimmung es nicht ankommt. Dieselbe Darstellung gilt aber auch für jeden andern Werth von a; nur ist dann $m = 0$.

Dieser Satz läßt sich nun in folgender Weise umkehren.

Theorem.

Wenn eine eindeutige Function $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ *der unbeschränkt veränderlichen Größe* $\boldsymbol{u}$ *die Eigenschaft besitzt, daß*

$$\boldsymbol{F}(a+k),$$

wo a irgend einen besondern Werth von $\boldsymbol{u}$, *k aber eine Veränderliche bezeichnet, für hinlänglich kleine Werthe der letztern in eine convergirende Reihe von der Form*

$$m\,\frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + \underset{\mathfrak{m}=0\ldots\infty}{\mathbf{S}}\, h_{\mathfrak{m}} k^{\mathfrak{m}}\ ,$$

wo m entweder Null oder eine ganze positive Zahl bedeuten soll, entwickelbar ist; so läßt sich eine b e s t ä n d i g *convergirende Reihe*

$$f_0\,\boldsymbol{u}^\mu + f_1\,\boldsymbol{u}^{\mu+1} + \cdots + f_{\mathfrak{m}}\,\boldsymbol{u}^{\mu+\mathfrak{m}} + \cdots = f(\boldsymbol{u}),$$

in der μ *den zu* $a = 0$ *gehörigen Werth von m bezeichnet, dergestalt bestimmen, daß*

$$\frac{\partial^\lambda \log f(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^\lambda} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$$

ist. Und zwar erhält man den allgemeinsten Ausdruck von $f(\boldsymbol{u})$, *indem man, unter der Voraussetzung, daß für hinlänglich kleine Werthe von* $\boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \mu\,\frac{\partial^\lambda \log \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{u}^\lambda} + \underset{\mathfrak{m}=0\ldots\infty}{\mathbf{S}}\, \boldsymbol{F}_{\mathfrak{m}} \boldsymbol{u}^{\mathfrak{m}}$$

gefunden sei, die Formel

$$\boldsymbol{u}^\mu e^{\mathbf{S}\left\{\frac{\boldsymbol{F}_{\mathfrak{m}}\,\boldsymbol{u}^{\lambda+\mathfrak{m}}}{(\mathfrak{m}+1)\ldots(\mathfrak{m}+\lambda)}\right\}+\boldsymbol{C}_0+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{u}+\cdots+\boldsymbol{C}_{\lambda-1}\boldsymbol{u}^{\lambda-1}}\ ,$$

in der $\boldsymbol{C}_0, \boldsymbol{C}_1, \ldots, \boldsymbol{C}_{\lambda-1}$ *willkührliche Constanten bezeichnen, nach Potenzen von* $\boldsymbol{u}$ *entwickelt, wenn auch die dabei gebrauchte Reihe*

$$\mathbf{S}\left\{\frac{\boldsymbol{F}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{u}^{\lambda+\mathfrak{m}}}{(\mathfrak{m}+1)\ldots(\mathfrak{m}+\lambda)}\right\}$$

nicht für alle Werthe von u convergirt.

B e w e i s.

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ unter den Werthen von $\boldsymbol{u}$, für welche $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ unendlich groß wird, diejenigen, die ihrem absoluten Betrage nach kleiner als eine beliebig angenommene Größe $\boldsymbol{U}$ sind, den Werth Null, wenn er auch zu denselben gehört, ausgeschlossen. Es ist leicht zu erweisen, daß es nur eine endliche Anzahl solcher Werthe geben kann. Denn sonst müßte sich in dem angegebenen Bereiche von $\boldsymbol{u}$ wenigstens *ein* Werth a finden, in dessen Nähe eine unbegränzte Menge derselben vorhanden wäre. Dann aber ließe sich $\boldsymbol{F}(a + k)$, wie klein auch k angenommen werde, nicht nach ganzen Potenzen dieser Größe in eine convergirende Reihe entwickeln, die, wie doch vorausgesetzt wird, nur eine endliche Zahl Glieder mit negativen Potenzen von k enthält. Bezeichnet man nun mit $m_1, m_2, \ldots, m_\sigma$ die zu $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ gehörigen Werthe der Zahl m in den Entwicklungen von

$$\boldsymbol{F}(a_1 + k), \quad \boldsymbol{F}(a_2 + k), \quad \ldots, \quad \boldsymbol{F}(a_\sigma + k),$$

und setzt

$$\boldsymbol{u}^\mu\Big(1 - \frac{\boldsymbol{u}}{a_1}\Big)^{m_1}\Big(1 - \frac{\boldsymbol{u}}{a_2}\Big)^{m_2}\cdots\Big(1 - \frac{\boldsymbol{u}}{a_\sigma}\Big)^{m_\sigma} = \pi(\boldsymbol{u}),$$

so hat man nach dem oben Bemerkten

$$\Big(\frac{\partial^\lambda \log \pi(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^\lambda}\Big)_{\boldsymbol{u}=a+k} = m\,\frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + \{\text{Glieder mit ganzen positiven Potenzen von } k\},$$

wo $m = \mu, m_1, m_2, \ldots, m_\sigma$ ist für $a = 0, a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$, und Null für jeden andern Werth von a. Setzt man daher

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) - \frac{\partial^\lambda \log \pi(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^\lambda} = \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{u}),$$

so ist $\boldsymbol{F}_1(a + k)$ bei jedem Werthe von a, dessen absoluter Betrag kleiner als $\boldsymbol{U}$ ist, in eine nur ganze positive Potenzen von k enthaltende Reihe entwickelbar. Daraus folgt, daß $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{u})$, so lange der absolute Betrag von $\boldsymbol{u}$ unterhalb der genannten Gränze bleibt, stäts einen endlichen Werth hat und sich continuirlich mit $\boldsymbol{u}$ ändert. Dasselbe gilt von $\frac{\partial \boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}}$ (so wie von den höhern Differential-Coefficienten dieser Function). Nach einem ***Cauchy***'schen Satze läßt sich daher $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{u})$ für alle jene Werthe von $\boldsymbol{u}$ durch eine convergirende Reihe

$$\underset{\mathfrak{m}=0\ldots\infty}{\mathbf{S}}\, \boldsymbol{G}_{\mathfrak{a}}\boldsymbol{u}^{\mathfrak{m}}$$

darstellen. Wird daher

$$f_1(u) = \pi(u)\, e^{\mathbf{S}\left\{\frac{G_{\mathfrak{m}} u^{\lambda+\mathfrak{m}}}{(\mathfrak{m}+1)\cdots(\mathfrak{m}+\lambda)}\right\}}$$

gesetzt, so ist $f_1(u)$ in eine, jedenfalls für dieselben Werthe von u convergirende Reihe von der Form

$$f_1(u) = u^{\mu} + \mathbf{S}\overset{1}{f}_{\mathfrak{m}} u^{\lambda+\mathfrak{m}} \quad \mathfrak{m} = 0 \ldots \infty$$

entwickelbar,*) und man hat

$$\frac{\partial^{\lambda} \log f_1(u)}{\partial u^{\lambda}} = \frac{\partial^{\lambda} \log \pi(u)}{\partial u^{\lambda}} + F_1(u) = F(u).$$

Nun kann man aber, wenn u dem absoluten Betrage nach kleiner als jede der Größen $a_1, a_2, \ldots, a_\sigma$ ist, $F(u)$ durch eine convergirende Reihe

$$\mu \frac{\partial^{\lambda} \log u}{\partial u^{\lambda}} + \mathbf{S}\, F_{\mathfrak{m}} u^{\mathfrak{m}}$$

ausdrücken, wo μ Null oder eine ganze positive Zahl ist. Nimmt man daher für $f(u)$ die aus der Entwicklung des Ausdrucks

$$u^{\mu} e^{\mathbf{S}\left\{\frac{F_{\mathfrak{m}} u^{\lambda+\mathfrak{m}}}{(\mathfrak{m}+1)\cdots(\mathfrak{m}+\lambda)}\right\} + C_0 + C_1 u + \cdots + C_{\lambda-1} u^{\lambda-1}}$$

hervorgehende Reihe, so convergirt dieselbe sicher bei den eben genannten Werthen von u, und man hat für dieselben

$$\frac{\partial^{\lambda} \log f(u)}{\partial u^{\lambda}} = F(u),$$

und mithin auch

$$\frac{\partial^{\lambda} \log f(u)}{\partial u^{\lambda}} = \frac{\partial^{\lambda} \log f_1(u)}{\partial u^{\lambda}},$$

woraus durch Integration

$$\log f(u) = \log f_1(u) + C'_0 + C'_1 u + \cdots + C'_{\lambda-1} u^{\lambda-1},$$

$$f(u) = f_1(u) \,.\, e^{C'_0 + C'_1 u + \cdots + C'_{\lambda-1} u^{\lambda-1}}$$

*) S. die Sätze des §. 7. der Abhandlung über die Facultäten.

folgt, wo $C'_0, C'_1, \ldots, C'_{\lambda-1}$ gleich $C_0, C_1, \ldots, C_{\lambda-1}$ Constanten sind, und aus den für $f(u)$ und $f_1(u)$ aufgestellten Ausdrücken sofort erhellt, daß man, wenn

$$\log\left(\frac{\pi(u)}{u^\mu}\right) = c_1\, u + c_2\, u^2 + \cdots$$

ist,

$$C'_0 + C'_1 u + \cdots + C'_{\lambda-1} u^{\lambda-1} = C_0 + C_1 u + \cdots + C_{\lambda-1} u^{\lambda-1} - c_1 u - \cdots - c_{\lambda-1} u^{\lambda-1}$$

hat. Der Exponential-Factor in dem vorstehenden Ausdrucke von $f(u)$ läßt sich aber nach Potenzen von u in eine beständig convergirende Reihe entwickeln; folglich muß auch das Product aus derselben und der Reihe für $f_1(u)$, das heißt die mit $f(u)$ bezeichnete Reihe convergiren, sobald der absolute Werth von u kleiner als U ist. Aber U kann beliebig groß angenommen werden, während die Coefficienten von $f(u)$ stäts dieselben bleiben, welchen Werth auch U haben möge. Mithin muß die Reihe für $f(u)$ eine *beständig* convergirende sein, wenn auch die bei der Bildung ihrer Coefficienten gebrauchte

$$\mathbf{S}\left\{\frac{F_{\mathfrak{m}} u^{\lambda+\mathfrak{m}}}{(\mathfrak{m}+1)\ldots(\mathfrak{m}+\lambda)}\right\}$$

es nicht ist.

Zugleich sieht man aus der vorhergehenden Darstellung, daß die aufgestellte Formel den allgemeinsten Ausdruck der Function $f(u)$ liefert. Denn gesetzt, es sei $f_0(u)$ irgend eine andere, welche auch der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^\lambda \log f_0(u)}{\partial u^\lambda} = F(u)$$

genügt, so muß, wie gezeigt,

$$f_0(u) = f(u)\, e^{\chi(u)}$$

sein, wo $\chi(u)$ eine ganze Function $(\lambda - 1)$ten Grades bedeutet, wonach $f_0(u)$ in dem für $f(u)$ gegebenen Ausdrucke mit einbegriffen ist.

A n m e r k u n g. Hätte die Function $F(u)$ nicht für *alle* Werthe von u, sondern nur für alle dem absoluten Betrage nach unterhalb einer gewissen Gränze liegenden, die angegebenen Eigenschaften; so folgt aus dem vorstehenden Beweise, daß die auf die angezeigte Weise gebildete Reihe $f(u)$ jedenfalls für

die bezeichneten Werthe von $\boldsymbol{u}$ convergent sein und der Differential-Gleichung $\frac{\partial^\lambda f(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^\lambda} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ genügen würde.

Der bewiesene Satz kann nun, wenn zwischen zwei veränderlichen Größen x und $\boldsymbol{u}$ eine algebraische Differential-Gleichung besteht, dazu gebraucht werden, um zu entscheiden, ob sich wirklich x als eine Function von $\boldsymbol{u}$, die den Charakter einer ganzen oder gebrochenen rationalen hat, betrachten lasse, und um, wenn das Letztere der Fall ist, zur Bestimmung des Zählers und des Nenners *zwei* Differential-Gleichungen zu ermitteln. Denn immer wird sich aus der gegebenen Differential-Gleichung für irgend einen λten Differential-Coefficienten von $\log x$ ein Ausdruck von der Form

$$\frac{\partial^\lambda \log x}{\partial \boldsymbol{u}^\lambda} = \boldsymbol{F}\Big(\boldsymbol{u},\ x,\ \frac{\partial x}{\partial \boldsymbol{u}},\ \ldots,\ \frac{\partial^{\lambda-1} x}{\partial \boldsymbol{u}^{\lambda-1}}\Big)$$

herleiten lassen, wo $\boldsymbol{F}$ eine rationale Function von x, $\frac{\partial x}{\partial \boldsymbol{u}}$ u. s. w. bezeichnen soll, deren Coefficienten Constanten oder eindeutige analytische Functionen von $\boldsymbol{u}$ sind. Wenn nun x in der Gestalt

$$\frac{f_1(\boldsymbol{u})}{f_2(\boldsymbol{u})}\,,$$

wo unter $f_1(\boldsymbol{u})$, $f_2(\boldsymbol{u})$ zwei nach ganzen positiven Potenzen von $\boldsymbol{u}$ in beständig convergirende Reihen entwickelbare Functionen zu verstehen sind, darstellbar sein soll, so muß, indem dann

$$\frac{\partial^\lambda \log x}{\partial \boldsymbol{u}^\lambda} = \frac{\partial^\lambda \log f_1(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^\lambda} - \frac{\partial^\lambda \log f_2(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^\lambda}$$

ist, $\boldsymbol{F}$ sich auf die Form $\boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_2$ in der Art bringen lassen, daß $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ Functionen von der in dem aufgestellten Satze beschriebenen Art sind. Gelingt es nun, $\boldsymbol{F}$ in dieser Weise umzuformen, wo denn im Allgemeinen $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ Functionen von $\boldsymbol{u}$, x, $\frac{\partial x}{\partial \boldsymbol{u}}, \ldots, \frac{\partial^{\lambda-1} x}{\partial \boldsymbol{u}^{\lambda-1}}$ sein werden, und der Nachweis, daß sie die in Rede stehende Beschaffenheit haben, mit Hülfe dessen, was hinsichtlich des zwischen x und $\boldsymbol{u}$ bestehenden Abhängigkeits-Verhältnisses aus der gegebenen Differential-Gleichung folgt, oder sonst bekannt ist, geliefert werden muß; so kann man

$$\frac{\partial^\lambda \log f_1(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^\lambda} = \boldsymbol{F}_1, \quad \frac{\partial^\lambda \log f_2(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^\lambda} = \boldsymbol{F}_2$$

setzen, und dann, indem man für x diejenige Entwicklung nach Potenzen von $\boldsymbol{u}$ sucht, welche für hinlänglich kleine Werthe von $\boldsymbol{u}$ gilt, und hierauf die entsprechenden Entwicklungen von $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ ausführt, die Reihen für $f_1(\boldsymbol{u})$, $f_2(\boldsymbol{u})$

in der beschriebenen Weise bilden – oder man kann auch, in $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ $\frac{f_1(\boldsymbol{u})}{f_2(\boldsymbol{u})}$ statt x einführend, aus den so sich ergebenden Gleichungen die Coefficienten der gesuchten Reihen, deren Form und beständige Convergenz ja bereits vor ihrer Entwicklung feststeht, nach irgend einer passenden Methode ableiten; worauf man bei gehöriger Constanten-Bestimmung $x = \frac{f_1(\boldsymbol{u})}{f_2(\boldsymbol{u})}$ haben wird.

Wenn man im Stande ist, von der Größe x vor ihrer Entwicklung nachzuweisen, daß sie eine eindeutige Function von $\boldsymbol{u}$ ist, welche sich für alle in der Nähe eines beliebigen besondern Werthes a liegenden Werthe dieses Arguments durch eine convergirende Reihe von der Form

$$\boldsymbol{A}_0\,(\boldsymbol{u}-a)^{\mu} + \boldsymbol{A}_1\,(\boldsymbol{u}-a)^{\mu+1} + \boldsymbol{A}_2\,(\boldsymbol{u}-a)^{\mu+2} + \cdots,$$

wo μ eine ganze (positive oder negative) Zahl bedeutet, ausdrücken läßt; so genügt es, $\boldsymbol{F}$ als die Differenz zweier andern ähnlich gebildeten Ausdrücke $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ darzustellen, von denen sich zeigen läßt, daß der erste nur für solche Werthe von x unendlich groß werde, bei denen $x = 0$, der andere nur für diejenigen, bei denen $x = \infty$ wird – und man kann überzeugt sein, *daß die aus den Gleichungen*

$$\frac{\partial^{\lambda} \log f_1(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^{\lambda}} = \boldsymbol{F}_1 \qquad \frac{\partial^{\lambda} \log f_2(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^{\lambda}} = \boldsymbol{F}_2$$

auf die beschriebene Weise für $f_1(\boldsymbol{u})$, $f_2(\boldsymbol{u})$ sich ergebenden Reihen beständig convergent sein werden.

Denn bei der angenommenen Beschaffenheit von x hat man für jeden Werth von a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^{\lambda} \log x}{\partial \boldsymbol{u}^{\lambda}}\right)_{\boldsymbol{u}=a+k} &= \pm m\,\frac{\partial^{\lambda} \log k}{\partial k^{\lambda}} + \begin{Bmatrix}\text{Glieder mit nur ganzen}\\ \text{positiven Potenzen von } k\end{Bmatrix}\\ &= \boldsymbol{F}_1(a+k) - \boldsymbol{F}_2(a+k),\end{aligned}$$

wo m eine ganze positive Zahl ist, wenn für $\boldsymbol{u} = a$, $x = 0$ oder $= \infty$ wird, und das obere Zeichen im ersten, das untere im andern Falle gilt, während man $m = 0$ für jeden andern Werth von a hat. Ferner geben $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, wenn man in denselben $\boldsymbol{u} = a + k$ setzt und nach Potenzen von k entwickelt, Reihen mit nur ganzen Potenzen von k, wobei jedoch, da $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ für keinen Werth von $\boldsymbol{u}$ beide unendlich groß werden, niemals in beiden zugleich negative Potenzen von k vorkommen können. Daher folgt aus der vorstehenden Gleichung, wenn $\boldsymbol{F}_1(a) = \infty$ ist, (indem man mit (k) eine Reihe von der Form $h_0 + h_1\,k + h_2\,k^2 + \cdots$ andeutet)

$$\boldsymbol{F}_1(a+k) = m\frac{\partial^{\lambda} \log k}{\partial k^{\lambda}} + (k), \quad \boldsymbol{F}_2(a+k) = (k);$$

und wenn $\boldsymbol{F}_2(a) = \infty$,

$$\boldsymbol{F}_2(a+k) = m\frac{\partial^\lambda \log k}{\partial k^\lambda} + (k), \quad \boldsymbol{F}_1(k) = (k),$$

während man für jeden andern Werth von a

$$\boldsymbol{F}_1(a+k) = (k), \quad \boldsymbol{F}_2(a+k) = (k)$$

hat. Es besitzen also $\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{u})$ die bei dem entwickelten Satze für die Function $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ vorausgesetzte Beschaffenheit.

Wenn sich nur nachweisen ließe, daß man x für alle Werthe von $\boldsymbol{u}$, die dem absoluten Betrage nach unterhalb einer gewissen Gränze liegen, als eine Function dieser Veränderlichen von der angegebenen Beschaffenheit anzusehen habe; so würde man, in der beschriebenen Weise verfahrend, zu einer jedenfalls für alle jene Werthe von $\boldsymbol{u}$ geltenden Darstellung von x gelangen.

Sind für mehrere Functionen $x_1, x_2, \ldots$ von $\boldsymbol{u}$ eben so viele algebraische Differential-Gleichungen gegeben, so kann man bei deren Entwicklung in ganz ähnlicher Weise verfahren. Auch ist es möglich, in dem Falle, wo es sich um Functionen von mehr als einem Argumente handelt, die Untersuchung auf den hier betrachteten zurückzuführen, wie dies an dem Beispiel der ***Abel'***schen Functionen wird gezeigt werden. Ich halte es jedoch für zweckmäßig, zuvor die Fruchtbarkeit des im Vorhergehenden entwickelten Princips für die Darstellung der eindeutigen Functionen in seiner Anwendung auf die *elliptischen* Transcendenten klar zu machen.

§. 8.

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

Die in (§. 1 – 4.) behandelten Differential-Gleichungen reduciren sich für $\varrho = 1$ auf eine einzige, und zwar, wenn man in diesem Falle $\boldsymbol{u}, x$ statt $\boldsymbol{u}_1, x_1$ schreibt, und

$$\boldsymbol{A}_0 = \frac{1}{a_3 - a_1}$$

nimmt, so daß man

$$(1.) \qquad \boldsymbol{R}(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}{a_3 - a_1}, \ \boldsymbol{P}(x) = x - a_1, \ \boldsymbol{Q}(x) = \frac{(x-a_2)(x-a_3)}{a_3 - a_1}$$

hat, auf die folgende

$$(2.) \qquad d\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}.$$

Nach den Schlußformeln des §. 4. kann man, bei der Annahme, daß $x = a_1$ werde für $\boldsymbol{u} = 0$, die erstere Größe in der Form

$$x = a_1 + (a_2 - a_1)\ \mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1 \tag{3.}$$

ausdrücken, wo $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1$ eine eindeutige Function des unbeschränkt veränderlichen Arguments $\boldsymbol{u}$ bezeichnet, wobei dann

$$\sqrt{\boldsymbol{R}(x)} = (a_2 - a_1)\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1 \frac{\partial\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1}{\partial \boldsymbol{u}} \tag{4.}$$

zu nehmen ist, und man ferner

$$\left\{\begin{array}{ll} a_2 - x = (a_2 - a_1)\ \mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_2, & a_3 - x = (a_3 - a_1)\ \mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_3, \\ \mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_2 = 1 - \mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1, & \mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_3 = 1 - \dfrac{a_3 - a_2}{a_3 - a_1}\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1 \end{array}\right. \tag{5.}$$

hat, wo $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3$ Functionen derselben Art wie $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1$ sind. Für hinlänglich kleine Werthe von $\boldsymbol{u}$ haben $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3$ die Form

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1 = \boldsymbol{u} + f_1\,\boldsymbol{u}^3 + f_2\,\boldsymbol{u}^5 + \cdots + f_{\mathfrak{m}}\,\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}-1} + \cdots \\ \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2 = 1 + g_1\,\boldsymbol{u}^2 + g_2\,\boldsymbol{u}^4 + \cdots + g_{\mathfrak{m}}\,\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}} + \cdots \\ \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3 = 1 + h_1\,\boldsymbol{u}^2 + h_2\,\boldsymbol{u}^4 + \cdots + h_{\mathfrak{m}}\,\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}} + \cdots, \end{array}\right. \tag{6.}$$

wo die Coefficienten der unendlichen Reihen rational aus a_1, a_2, a_3 (welche Größen beliebige complexe Werthe haben können) zusammengesetzt werden. Und wenn man für den absoluten Betrag von $\boldsymbol{u}$ irgend eine beliebig anzunehmende Gränze, die er nicht überschreiten soll, festsetzt, so kann man $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3$ in der Form

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1 = \dfrac{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}_1\,\boldsymbol{u}^3 + \cdots + \boldsymbol{F}_{\mathfrak{m}}\,\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}-1} + \cdots}{1 + \boldsymbol{E}_1\,\boldsymbol{u}^2 + \cdots + \boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}\,\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}} + \cdots} \\[2ex] \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2 = \dfrac{1 + \boldsymbol{G}_1\,\boldsymbol{u}^2 + \cdots + \boldsymbol{G}_{\mathfrak{m}}\,\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}} + \cdots}{1 + \boldsymbol{E}_1\,\boldsymbol{u}^2 + \cdots + \boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}\,\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}} + \cdots} \\[2ex] \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3 = \dfrac{1 + \boldsymbol{H}_1\,\boldsymbol{u}^2 + \cdots + \boldsymbol{H}_{\mathfrak{m}}\,\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}} + \cdots}{1 + \boldsymbol{E}_1\,\boldsymbol{u}^2 + \cdots + \boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}\,\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}} + \cdots} \end{array}\right. \tag{7.}$$

ausdrücken, wo die unendlichen Reihen

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{F}_1\,\boldsymbol{u}^3 + \cdots, \quad 1 + \boldsymbol{G}_1\,\boldsymbol{u}^2 + \cdots, \quad 1 + \boldsymbol{H}_1\,\boldsymbol{u}^2 + \cdots, \quad 1 + \boldsymbol{E}_1\,\boldsymbol{u}^2 + \cdots,$$

deren Coefficienten gleichfalls rational aus a_1, a_2, a_3 zusammengesetzt werden, für alle Werthe von $\boldsymbol{u}$ innerhalb des auf die angegebene Weise begränzten Bereiches convergiren.

Dieses vorausgesetzt werde die Gleichung (2.) auf die Form

(8.) $$\left(\frac{dx}{d\boldsymbol{u}}\right)^2 = 4\boldsymbol{R}(x)$$

gebracht, so folgt

(9.) $$\frac{d^2x}{d\boldsymbol{u}^2} = 2\boldsymbol{R}'(x),$$

(10.) $$\frac{(x-a_1)\,d^2x - dx\,dx}{2(x-a_1)^2\,d\boldsymbol{u}^2} = \frac{\boldsymbol{R}'(x)}{x-a_1} - \frac{2\boldsymbol{R}(x)}{(x-a_1)^2}.$$

Aber

$$\frac{\boldsymbol{R}'(x)}{x-a_1} = \frac{\boldsymbol{R}'(a_1)}{x-a_1} + \boldsymbol{R}''(a_1) + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{R}'''(a_1)(x-a_1)$$

$$-\frac{2\boldsymbol{R}(x)}{(x-a_1)^2} = \frac{-2\boldsymbol{R}'(a_1)}{x-a_1} - \boldsymbol{R}''(a_1) - \tfrac{1}{3}\boldsymbol{R}'''(a_1)(x-a_1),$$

und daher, indem $\boldsymbol{R}'''(a_1) = \dfrac{6}{a_3-a_1}$ ist,

(11.) $$\frac{1}{2}\,\frac{d^2\log(x-a_1)}{d\boldsymbol{u}^2} = \frac{x-a_1}{a_3-a_1} - \frac{\boldsymbol{R}'(a_1)}{x-a_1}.$$

Nimmt man a_2, a_3 statt a_1, so erhält man ebenso

(12.) $$\frac{1}{2}\,\frac{d^2\log(x-a_2)}{d\boldsymbol{u}^2} = \frac{x-a_2}{a_3-a_1} - \frac{\boldsymbol{R}'(a_2)}{x-a_2} = \frac{x-a_1}{a_3-a_1} - \frac{\boldsymbol{R}'(a_2)}{x-a_2} - \frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}\,,$$

(13.) $$\frac{1}{2}\,\frac{d^2\log(x-a_3)}{d\boldsymbol{u}^2} = \frac{x-a_3}{a_3-a_1} - \frac{\boldsymbol{R}'(a_3)}{x-a_3} = \frac{x-a_1}{a_3-a_1} - \frac{\boldsymbol{R}'(a_3)}{x-a_3} - 1.$$

Führt man nun in diese Gleichungen $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3$ ein, und setzt

(14.) $$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = k^2, \quad \frac{a_3-a_2}{a_3-a_1} = 1-k^2,$$

so finden sich, indem

$$\boldsymbol{R}'(a_1) = a_2 - a_1, \quad \boldsymbol{R}'(a_2) = \frac{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)}{a_3 - a_1} = -(a_2 - a_1)(1 - k^2),$$
$$\boldsymbol{R}'(a_3) = (a_3 - a_2) = (a_3 - a_1)(1 - k^2)$$

ist, die folgenden

$$(15.)\quad \frac{d^2 \log \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1}{d\boldsymbol{u}^2} = k^2\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1 - \frac{1}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1} = -\frac{1}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1} - \left(-k^2\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1\right),$$

$$(16.)\quad \frac{d^2 \log \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2}{d\boldsymbol{u}^2} = k^2\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1 - \frac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_2} - k^2 = -\frac{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_3}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_2} - \left(-k^2\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1\right),$$

$$(17.)\quad \frac{d^2 \log \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3}{d\boldsymbol{u}^2} = k^2\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1 + \frac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_3} - 1 = -\frac{k^2\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_2}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_3} - \left(-k^2\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1\right).$$

Indem nun

$-\dfrac{1}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1} = \infty$ wird nur für solche Werthe von $\boldsymbol{u}$, die $\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1 = 0$ machen,

und

$-k^2\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1 = \infty$ – – – – – – $\boldsymbol{u}$, die $\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1 = \infty$ – ,

so kann man, nach dem im vorhergehenden §. bewiesenen Lehrsatze, zwei Functionen $\mathfrak{Al}(\boldsymbol{u})$, $\mathfrak{Al}(\boldsymbol{u})_1$, *die sich nach ganzen positiven Potenzen von* $\boldsymbol{u}$ *in beständig convergirende Reihen entwickeln lassen*, bestimmen, welche die Gleichungen

$$(18.)\quad \frac{d^2 \log \mathfrak{Al}(\boldsymbol{u})}{d\boldsymbol{u}^2} = -k^2\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1$$

$$(19.)\quad \frac{d^2 \log \mathfrak{Al}(\boldsymbol{u})_1}{d\boldsymbol{u}^2} = -\frac{1}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1}$$

befriedigen. Ebenso giebt es, weil

$-k^2\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1 = k^2\left(\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_2 - 1\right) = \infty$ wird nur für solche Werthe von $\boldsymbol{u}$,

für die $\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_2 = \infty$ ist,

$-\dfrac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_2} - k^2 = \infty$ wird nur für solche Werthe von $\boldsymbol{u}$,

für die $\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_2 = 0$ ist,

und

$$-k^2\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1 = \mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_3 - 1 = \infty \quad \text{wird nur für solche Werthe von } \boldsymbol{u},$$
$$\text{für die } \mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_3 = \infty \text{ ist,}$$
$$\frac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_3} - 1 = \infty \quad \text{wird nur für solche Werthe von } \boldsymbol{u},$$
$$\text{für die } \mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_3 = 0 \text{ ist,}$$

noch zwei Functionen $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3$ von derselben Art wie $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1$, welche den Gleichungen

$$\text{(20.)} \qquad \frac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2}{d\boldsymbol{u}^2} = -\frac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_2} - k^2 = -\frac{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_3}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_2}$$

$$\text{(21.)} \qquad \frac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3}{d\boldsymbol{u}^2} = \frac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_3} - 1 = -\frac{k^2\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_2}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_3}$$

genügen. Um dieselben darzustellen hat man die Functionen auf der rechten Seite dieser 4 Differential-Gleichungen nach Potenzen von $\boldsymbol{u}$ in Reihen zu entwickeln, die bei hinlänglich kleinen Werthen von $\boldsymbol{u}$ convergiren, wodurch man, nach den Formeln (6.),

$$\text{(22.)} \qquad \begin{cases} -k^2\,\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1 = \mathbf{S}\,\boldsymbol{P}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}+2}, \qquad -\dfrac{1}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_1} = -\dfrac{1}{\boldsymbol{u}^2} + \mathbf{S}\,\boldsymbol{P}'_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}}, \\ -\dfrac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_2} - k^2 = \underset{\mathfrak{m}=0\ldots\infty}{\mathbf{S}}\,\boldsymbol{P}''_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}}, \qquad \dfrac{1-k^2}{\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_3} - 1 = \mathbf{S}\,\boldsymbol{P}'''_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}} \end{cases}$$

erhält; und kann dann für $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3$ die aus der Entwicklung der Ausdrücke

$$\text{(23.)} \qquad \begin{cases} e^{\mathbf{S}\left\{\frac{\boldsymbol{P}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}+4}}{(2\mathfrak{m}+3)(2\mathfrak{m}+4)}\right\}}, \qquad \boldsymbol{u}e^{\mathbf{S}\left\{\frac{\boldsymbol{P}'_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}+2}}{(2\mathfrak{m}+1)(2\mathfrak{m}+2)}\right\}} \\ e^{\mathbf{S}\left\{\frac{\boldsymbol{P}''_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}+2}}{(2\mathfrak{m}+1)(2\mathfrak{m}+2)}\right\}}, \qquad e^{\mathbf{S}\left\{\frac{\boldsymbol{P}'''_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}+2}}{(2\mathfrak{m}+1)(2\mathfrak{m}+2)}\right\}} \end{cases}$$

hervorgehenden Reihen nehmen. Dann ist

$$(24.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 \log \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1}{d\boldsymbol{u}^2} = \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1}{d\boldsymbol{u}^2} - \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}{d\boldsymbol{u}^2} \\ \dfrac{d^2 \log \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2}{d\boldsymbol{u}^2} = \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2}{d\boldsymbol{u}^2} - \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}{d\boldsymbol{u}^2} \\ \dfrac{d^2 \log \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3}{d\boldsymbol{u}^2} = \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3}{d\boldsymbol{u}^2} - \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}{d\boldsymbol{u}^2}, \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen man, mit Berücksichtigung des Umstandes, daß in den Entwicklungen von

$$\frac{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}, \qquad \frac{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}, \qquad \frac{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}$$

nach Potenzen von $\boldsymbol{u}$ die Coefficienten von $\boldsymbol{u}^0$ und $\boldsymbol{u}^1$ dieselben sein müssen wie in den Reihen (6) für $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3$,

$$(25.)\qquad \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1 = \frac{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})} \qquad \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2 = \frac{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})} \qquad \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3 = \frac{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}$$

erhält. Man sieht also, *daß man für* $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3$, *sobald nur feststeht, daß sie eindeutige analytische Functionen von* $\boldsymbol{u}$, *in dem oben angegebenen Sinne, sind, unmittelbar aus den Differential-Gleichungen, durch welche sie definirt werden, zu Darstellungen gelangen kann, die für alle Werthe von* $\boldsymbol{u}$ *ihre Gültigkeit behalten.*

Führt man die gefundenen Ausdrücke von $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3$ in die Gleichungen (18 – 21) ein, so verwandeln sich dieselben in die folgenden:

$$(26.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})\,\dfrac{d^2\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}{d\boldsymbol{u}^2} - \dfrac{d\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}{d\boldsymbol{u}} \,.\, \dfrac{d\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}{d\boldsymbol{u}} + k^2\,\mathrm{Al}^2(\boldsymbol{u})_1 = 0 \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1\dfrac{d^2\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1}{d\boldsymbol{u}^2} - \dfrac{d\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1}{d\boldsymbol{u}} \,.\, \dfrac{d\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1}{d\boldsymbol{u}} + \mathrm{Al}^2(\boldsymbol{u}) = 0 \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2\dfrac{d^2\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2}{d\boldsymbol{u}^2} - \dfrac{d\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2}{d\boldsymbol{u}} \,.\, \dfrac{d\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2}{d\boldsymbol{u}} + \mathrm{Al}^2(\boldsymbol{u})_3 = 0 \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3\dfrac{d^2\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3}{d\boldsymbol{u}^2} - \dfrac{d\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3}{d\boldsymbol{u}} \,.\, \dfrac{d\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3}{d\boldsymbol{u}} + k^2\,\mathrm{Al}^2(\boldsymbol{u})_2 = 0, \end{cases}$$

wobei zu bemerken ist, daß in Folge der Relationen (5.)

$$(27.)\qquad \mathrm{Al}^2(\boldsymbol{u})_2 = \mathrm{Al}^2(\boldsymbol{u}) - \mathrm{Al}^2(\boldsymbol{u})_1, \quad \mathrm{Al}^2(\boldsymbol{u})_3 = \mathrm{Al}^2(\boldsymbol{u}) - k^2\,\mathrm{Al}^2(\boldsymbol{u})_1$$

ist. Berücksichtigt man nun, daß die Reihen für $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$ u. s. w. nach den Formeln (23.) die Gestalt

$$(28.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}) \;\; = 1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{u}^4 + \cdots + \boldsymbol{A}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}} + \cdots \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1 = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}^3 + \cdots + \boldsymbol{B}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}+1} + \cdots \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2 = 1 + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{u}^2 + \cdots + \boldsymbol{C}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}} + \cdots \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3 = 1 + \boldsymbol{D}_1\boldsymbol{u}^2 + \cdots + \boldsymbol{D}_{\mathfrak{m}}\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}} + \cdots \end{cases}$$

haben, so ist ersichtlich, daß die Gleichungen (26.) zur Bestimmung der Coefficienten dieser Reihen hinreichen, und daß dieselben ganze Functionen von k^2 mit rationalen Zahl-Coefficienten sind.

Aus den Gleichungen (1 – 5) folgt noch, wenn man

$$\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1 = \sqrt{\frac{x-a_1}{a_2-a_1}} = \xi$$

setzt,

$$(29.)\quad \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2 = \sqrt{1-\xi^2}, \quad \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3 = \sqrt{1-k^2\xi^2}$$

und

$$(30.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1}{d\boldsymbol{u}} = \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3 \\ \dfrac{d\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2}{d\boldsymbol{u}} = -\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3 \\ \dfrac{d\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3}{d\boldsymbol{u}} = -k^2\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1\,\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2 \\ \qquad d\boldsymbol{u} = \dfrac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\sqrt{1-k^2\xi^2}}. \end{cases}$$

Es sind also

$$\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1 \quad \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2 \quad \mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3$$

die von ***Jacobi*** mit

$$\sin\mathrm{am}\,\boldsymbol{u} \qquad \cos\mathrm{am}\,\boldsymbol{u} \qquad \Delta\,\mathrm{am}\,\boldsymbol{u},$$

und von ***Gudermann*** mit

$$\operatorname{sn} \boldsymbol{u} \qquad \operatorname{cn} \boldsymbol{u} \qquad \operatorname{dn} \boldsymbol{u}$$

bezeichneten ***elliptischen Functionen***. Nach der vorstehenden Darstellung ist man im Stande, nicht nur gleich im Eingange der Theorie von denselben eine allgemeine, gleichmäßig auf alle reellen und imaginären Werthe des Arguments wie des Moduls sich erstreckende Definition zu geben, sondern sie auch sofort wirklich zu entwickeln, und zwar in einer stäts gültig bleibenden und den wahren analytischen Charakter dieser Größen klar hervortreten lassenden Form. Dadurch ist aber für die weitere Theorie derselben eine sichere Grundlage gewonnen, und namentlich die Schwierigkeit beseitigt, welche bei dem gewöhnlichen Verfahren, wenn man $\sin \operatorname{am} \boldsymbol{u}$ vermittelst der Gleichung

$$\boldsymbol{u} = \int_0^{\sin \operatorname{am} \boldsymbol{u}} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\sqrt{1-k^2\xi^2}}$$

definirt, aus der *Vieldeutigkeit* eines Integrals von dieser Form entspringt. Nachdem nämlich $\sin \operatorname{am} \boldsymbol{u}$ als eine eindeutige Function von $\boldsymbol{u}$ erkannt ist, hält es nicht schwer, den richtigen Sinn, in welchem die vorstehende Gleichung aufzufassen ist, festzustellen. Hierauf gehe ich aber hier nicht näher ein, indem dieser Gegenstand weiter unten für die ***Abel***'schen Functionen überhaupt zur Sprache kommen muß. Dagegen möge schon jetzt erwähnt werden, daß von den Functionen $\operatorname{Al}(\boldsymbol{u})$ u. s. w. aus ein directer Weg zu den ***Jacobi***'schen Θ Functionen führt, sowie überhaupt zu allen Darstellungen der elliptischen Transcendenten, die auf deren periodischem Verhalten beruhen.

Bei den Entwicklungen dieses §. habe ich, mit Rücksicht darauf, daß sie vorbereitend für die folgenden sein sollen, die für die ***Abel***'schen Functionen überhaupt gewonnenen und aus dem ***Abel***'schen Theoreme hervorgehenden Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen vorausgesetzt. Es beruht aber die Anwendbarkeit des im vorhergehenden §. begründeten Entwicklungs-Verfahrens auf die Differential-Gleichung

$$d\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\,\frac{dx}{\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}}$$

wesentlich nur darauf, daß vorher *Zweierlei* festgestellt sein muß. Zunächst ist zu zeigen, daß sich für hinlänglich kleine Werthe von $\boldsymbol{u}$

$$\sqrt{\frac{x-a_1}{a_2-a_1}}, \quad \sqrt{\frac{a_2-x}{a_2-a_1}}, \quad \sqrt{\frac{a_3-x}{a_3-a_1}}$$

in Reihen von der unter (6.) aufgestellten Gestalt entwickeln lassen, und dann muß die Möglichkeit nachgewiesen werden, Ausdrücke von der Form

$$\frac{p}{s}, \quad \frac{q}{s}, \quad \frac{r}{s}$$

in denen p, q, r, s ähnlich gestaltete, für alle Werthe von $\boldsymbol{u}$, die ihrem absoluten Betrage nach eine willkührlich angenommene Gränze nicht übersteigen, convergirende Reihen sein sollen, in der Art zu bestimmen, daß sie nach Potenzen von $\boldsymbol{u}$ entwickelt in jene drei Reihen übergehen. Denn dies reicht hin, um die Existenz eindeutiger analytischer Functionen $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_1$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{al}(\boldsymbol{u})_3$, durch welche x und $\sqrt{\boldsymbol{R}(x)}$ in der durch die Formeln (3, 4, 5) angegebenen Weise ausgedrückt werden können, zu erweisen. *Beides läßt sich nun in der That durch bloße Betrachtung der aufgestellten Differential-Gleichung in aller Strenge bewerkstelligen; und man kann daher, unmittelbar von dieser Gleichung aus, ohne irgend eine andere Eigenschaft der elliptischen Functionen als bekannt vorauszusetzen, und bloß mit Hülfe allgemeiner Entwicklungs-Principien, zu der hier gegebenen Darstellung dieser Transcendenten gelangen.* Ich kann jedoch dieses, wie es mir scheint, wichtige Ergebniß hier nicht näher begründen, gedenke aber später darauf zurückzukommen, wenn es mir, was bisher noch nicht vollständig der Fall war, gelingen sollte, für die ***Abel'***schen Functionen aller Ordnungen ein ähnliches Resultat zu erhalten. Es möge aber, da man bei den elliptischen Functionen so mancherlei Methoden versucht hat, erlaubt sein, bei dieser Gelegenheit noch ein anderes Verfahren anzudeuten, welches ich in einer bereits im Jahre 1840 verfaßten Prüfungsarbeit zur Entwicklung derselben angewandt habe, und das mir so einfach und elementar zu sein scheint, als man nur wünschen kann.

§. 9.

Fortsetzung.

Ausgehend von den Differential-Gleichungen

(1.) $$\frac{d\xi}{d\boldsymbol{u}} = \eta\zeta, \quad \frac{d\eta}{d\boldsymbol{u}} = -\xi\zeta, \quad \frac{d\zeta}{d\boldsymbol{u}} = -k^2\xi\eta,$$

welche, wenn man noch hinzufügt, daß für $\boldsymbol{u} = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 1$, $\zeta = 1$ sein sollen, zu den folgenden

(2.) $$d\boldsymbol{u} = \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\sqrt{1-k^2\xi^2}}, \qquad \sqrt{1-\xi^2} = \eta, \quad \sqrt{1-k^2\xi^2} = \zeta$$

führen, kann man ξ, η, ζ zunächst in der Form gewöhnlicher Potenzreihen

(3.) $\xi = \boldsymbol{u} + f_1\boldsymbol{u}^3 + \cdots$, $\eta = 1 + g_1\boldsymbol{u}^2 + \cdots$, $\zeta = 1 + h_1\boldsymbol{u}^2 + \cdots$ (S. Gl. 6 d. v. §.)

entwickeln, deren Coefficienten ganze Functionen von k^2 sind. Es ist leicht nachzuweisen, daß dieselben für alle Werthe von $\boldsymbol{u}$, deren absoluter Betrag unter einer gewissen Größe $\boldsymbol{U}$, deren genauere Kenntniß nicht erforderlich ist, bleibt, unbedingt convergiren. Beschränkt man nun $\boldsymbol{u}$ zunächst auf diese Werthe, so stellen die Reihen eindeutige Functionen von $\boldsymbol{u}$ dar, die jetzt nach ***Gudermann*** mit

$$\operatorname{sn}\boldsymbol{u} \qquad \operatorname{cn}\boldsymbol{u} \qquad \operatorname{dn}\boldsymbol{u}$$

bezeichnet werden mögen.

Nun hat man die Formeln herzuleiten, vermittelst welcher, wenn

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$$

ist,

$$\operatorname{sn}\boldsymbol{u},\ \operatorname{cn}\boldsymbol{u},\ \operatorname{dn}\boldsymbol{u} \quad \text{durch} \quad \operatorname{sn}\boldsymbol{v},\ \operatorname{cn}\boldsymbol{v},\ \operatorname{dn}\boldsymbol{v},\ \operatorname{sn}\boldsymbol{w},\ \operatorname{cn}\boldsymbol{w},\ \operatorname{dn}\boldsymbol{w}$$

ausgedrückt werden können, nämlich

$$(4.)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn}\boldsymbol{u} = \dfrac{\operatorname{sn}\boldsymbol{v}\ \operatorname{cn}\boldsymbol{w}\ \operatorname{dn}\boldsymbol{w} + \operatorname{cn}\boldsymbol{v}\ \operatorname{dn}\boldsymbol{v}\ \operatorname{sn}\boldsymbol{w}}{1 - k^2\operatorname{sn}^2\boldsymbol{v}\ \operatorname{sn}^2\boldsymbol{w}} \\[2ex] \operatorname{cn}\boldsymbol{u} = \dfrac{\operatorname{cn}\boldsymbol{v}\ \operatorname{cn}\boldsymbol{w} - \operatorname{sn}\boldsymbol{v}\ \operatorname{dn}\boldsymbol{v}\ \operatorname{sn}\boldsymbol{w}\ \operatorname{dn}\boldsymbol{w}}{1 - k^2\operatorname{sn}^2\boldsymbol{v}\ \operatorname{sn}^2\boldsymbol{w}} \\[2ex] \operatorname{dn}\boldsymbol{u} = \dfrac{\operatorname{dn}\boldsymbol{v}\ \operatorname{dn}\boldsymbol{w} - k^2\operatorname{sn}\boldsymbol{v}\ \operatorname{cn}\boldsymbol{v}\ \operatorname{sn}\boldsymbol{w}\ \operatorname{cn}\boldsymbol{w}}{1 - k^2\operatorname{sn}^2\boldsymbol{v}\ \operatorname{sn}^2\boldsymbol{w}}, \end{cases}$$

wobei vorläufig $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ alle drei dem absoluten Betrage nach kleiner als $\boldsymbol{U}$ vorauszusetzen sind. Aus denselben übersieht man sofort, auch ohne die Rechnung auszuführen, daß man, wenn m eine ganze positive Zahl bedeutet, $\operatorname{sn}\boldsymbol{u}$, $\operatorname{cn}\boldsymbol{u}$, $\operatorname{dn}\boldsymbol{u}$ rational durch $\operatorname{sn}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$ ausdrücken kann, in der Form

$$(5.)\qquad \operatorname{sn}\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{P}}{\mathbf{S}} \quad \operatorname{cn}\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\mathbf{S}} \quad \operatorname{dn}\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{R}}{\mathbf{S}},$$

wo $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\mathbf{S}$ ganze Functionen von $\operatorname{sn}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$ und $\operatorname{dn}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$ bedeuten. Man kann ferner leicht nachweisen, daß $\mathbf{S}$ und auch $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{Q}^2$, $\boldsymbol{R}^2$ ganze Functionen von $\operatorname{sn}^2\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$ sind, und daß sie, als solche betrachtet, keinen gemeinschaftlichen

Factor haben. (S. ***Abel***, Précis etc. §. 4, und ***Gudermann***, Theor. d, Modular-F. §. 149.) Aus den Gleichungen

$$(6.)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\,\mathrm{sn}\,\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{u}} = \mathrm{cn}\,\boldsymbol{u}\ \mathrm{dn}\,\boldsymbol{u}, \quad \dfrac{d\,\mathrm{cn}\,\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{u}} = -\,\mathrm{sn}\,\boldsymbol{u}\ \mathrm{dn}\,\boldsymbol{u}, \quad \dfrac{d\,\mathrm{dn}\,\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{u}} = -k^2\,\mathrm{sn}\,\boldsymbol{u}\ \mathrm{cn}\,\boldsymbol{u} \\ \mathrm{sn}^2\,\boldsymbol{u} + \mathrm{cn}^2\,\boldsymbol{u} = 1, \quad k^2\,\mathrm{sn}^2\,\boldsymbol{u} + \mathrm{dn}^2\,\boldsymbol{u} = 1 \end{cases}$$

leitet man sodann die Ausdrücke für $\dfrac{d^2\log\mathrm{sn}\,\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{u}^2}$ u. s. w. ab (s. Gl. 15, 16, 17 d. v. §.), und führt in dieselben $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\mathbf{S}$ ein, wodurch man

$$(7.)\qquad \frac{d^2\log\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{u}^2} + \frac{\mathbf{S}^2}{\boldsymbol{P}^2} = \frac{d^2\log\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{u}^2} + \frac{\boldsymbol{R}^2}{\boldsymbol{Q}^2} = \frac{d^2\log\boldsymbol{R}}{d\boldsymbol{u}^2} + \frac{k^2\boldsymbol{Q}^2}{\boldsymbol{R}^2} = \frac{d^2\log\mathbf{S}}{d\boldsymbol{u}^2} + \frac{k^2\boldsymbol{P}^2}{\mathbf{S}^2}$$

erhält. Setzt man

$$\frac{d^2\log\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{u}^2} = \frac{\boldsymbol{P}_1}{\boldsymbol{P}^2}, \quad \frac{d^2\log\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{u}^2} = \frac{\boldsymbol{Q}_1}{\boldsymbol{Q}^2}, \quad \frac{d^2\log\boldsymbol{R}}{d\boldsymbol{u}^2} = \frac{\boldsymbol{R}_1}{\boldsymbol{R}^2}, \quad \frac{d^2\log\mathbf{S}}{d\boldsymbol{u}^2} = \frac{\mathbf{S}_1}{\mathbf{S}^2},$$

so ist zunächst $\mathbf{S}_1$ eine ganze Function von $\mathrm{sn}^2\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$, indem $\mathbf{S}$, $\left(\dfrac{d\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)}{d\boldsymbol{u}^2}\right)^2$, $\dfrac{d^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)}{d\boldsymbol{u}^2}$, solche sind, und dann zeigen die vorstehenden Gleichungen (7.), daß $\dfrac{d^2\log\boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{u}^2}$, $\dfrac{d^2\log\boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{u}^2}$, $\dfrac{d^2\log\boldsymbol{R}}{d\boldsymbol{u}^2}$ rationale, und daher $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{R}_1$ ganze Functionen von $\mathrm{sn}^2\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$ sind. Die Gleichungen

$$\frac{\boldsymbol{P}_1 + \mathbf{S}^2}{\boldsymbol{P}^2} = \frac{\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{R}^2}{\boldsymbol{Q}^2} = \frac{\boldsymbol{R}_1 + k^2\boldsymbol{Q}^2}{\boldsymbol{R}^2} = \frac{\mathbf{S}_1 + k^2\boldsymbol{P}^2}{\mathbf{S}^2}$$

lehren dann, indem $\boldsymbol{P}^2$, $\boldsymbol{Q}^2$, $\boldsymbol{R}^2$, $\mathbf{S}^2$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben, daß in diesen Ausdrücken die Zähler durch die Nenner theilbar sind, und der Quotient eine ganze Function von $\mathrm{sn}^2\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$ ist. Die Kenntniß des letztern ist nicht unumgänglich erforderlich; man findet aber, wenn man den Grad von $\boldsymbol{P}^2$ und von $\mathbf{S}^2$ bestimmt und dann von den Entwicklungen der Ausdrücke $\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2\log\boldsymbol{P}^2}{d\boldsymbol{u}^2} + \dfrac{\mathbf{S}^2}{\boldsymbol{P}^2}$, $\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2\log\mathbf{S}^2}{d\boldsymbol{u}^2} + \dfrac{k^2\boldsymbol{P}^2}{\mathbf{S}^2}$ nach steigenden und fallenden Potenzen

von $\mathrm{sn}^2\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$ bloß die Anfangsglieder mit einander vergleicht, daß derselbe $k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$ ist. Man hat daher

$$
(8.)\quad \begin{cases}
\dfrac{d^2 \log \boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{u}^2} + \dfrac{1}{\mathrm{sn}^2\,\boldsymbol{u}} - k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{m}\right) = 0 \\
\dfrac{d^2 \log \boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{u}^2} + \dfrac{\mathrm{dn}^2\,\boldsymbol{u}}{\mathrm{cn}^2\,\boldsymbol{u}} - k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{m}\right) = 0 \\
\dfrac{d^2 \log \boldsymbol{R}}{d\boldsymbol{u}^2} + \dfrac{k^2 cn^2 \boldsymbol{u}}{\mathrm{cn}^2\,\boldsymbol{u}} - k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{m}\right) = 0 \\
\dfrac{d^2 \log \boldsymbol{S}}{d\boldsymbol{u}^2} + k^2\,\mathrm{sn}^2\,\boldsymbol{u} - k^2\,\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{m}\right) = 0.
\end{cases}
$$

Bildet man nun, ganz so wie im vorhergehenden §., die 4 Functionen $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3$, so daß man

$$
(9.)\quad \begin{cases}
\dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}{d\boldsymbol{u}^2} + k^2\,\mathrm{sn}^2\,\boldsymbol{u} = 0, \qquad \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1}{d\boldsymbol{u}^2} + \dfrac{1}{\mathrm{sn}^2\,\boldsymbol{u}} = 0, \\
\dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2}{d\boldsymbol{u}^2} + \dfrac{\mathrm{dn}^2\,\boldsymbol{u}}{\mathrm{cn}^2\,\boldsymbol{u}} = 0, \qquad \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3}{d\boldsymbol{u}^2} + \dfrac{k^2\,\mathrm{cn}^2\,\boldsymbol{u}}{\mathrm{dn}^2\,\boldsymbol{u}} = 0
\end{cases}
$$

hat, so geben die Gleichungen (8.)

$$
(10.)\quad \begin{cases}
\dfrac{d^2 \log \boldsymbol{P}}{d\boldsymbol{u}^2} = \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1}{d\boldsymbol{u}^2} - m^2 \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)}{d\boldsymbol{u}^2} \\
\dfrac{d^2 \log \boldsymbol{Q}}{d\boldsymbol{u}^2} = \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2}{d\boldsymbol{u}^2} - m^2 \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)}{d\boldsymbol{u}^2} \\
\dfrac{d^2 \log \boldsymbol{R}}{d\boldsymbol{u}^2} = \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3}{d\boldsymbol{u}^2} - m^2 \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)}{d\boldsymbol{u}^2} \\
\dfrac{d^2 \log \boldsymbol{S}}{d\boldsymbol{u}^2} = \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}{d\boldsymbol{u}^2} - m^2 \dfrac{d^2 \log \mathrm{Al}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)}{d\boldsymbol{u}^2}.
\end{cases}
$$

Hieraus aber folgt, mit Rücksicht auf die ersten Glieder in den Reihen-Entwick-

lungen der vorkommenden Größen,

(11.) $$\begin{cases} \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}_1) = \mathrm{Al}^{mm}\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{m}\right) \cdot \boldsymbol{P} \qquad \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}_2) = \mathrm{Al}^{mm}\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{m}\right) \cdot \boldsymbol{Q} \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}_3) = \mathrm{Al}^{mm}\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{m}\right) \cdot \boldsymbol{R} \qquad \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}) = \mathrm{Al}^{mm}\left(\dfrac{\boldsymbol{u}}{m}\right) \cdot \boldsymbol{S} \end{cases}$$

und somit (gemäß 5)

(12.) $$\operatorname{sn} \boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})} \qquad \operatorname{cn} \boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})} \qquad \operatorname{dn} \boldsymbol{u} = \frac{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}.$$

(13.) $$\begin{cases} d\left(\dfrac{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}\right) = \dfrac{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}\, d\boldsymbol{u} \\ d\left(\dfrac{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}\right) = -\dfrac{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}\, d\boldsymbol{u} \\ d\left(\dfrac{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}\right) = -\dfrac{k^2\, \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}\, d\boldsymbol{u}. \end{cases}$$

Alle diese Gleichungen sind zunächst nur unter der Voraussetzung erwiesen, daß u dem absoluten Betrage nach kleiner als $\boldsymbol{U}$ sei, weil ja nur für solche Werthe des Arguments die Functionen $\operatorname{sn} \boldsymbol{u}$, $\operatorname{cn} \boldsymbol{u}$, $\operatorname{dn} \boldsymbol{u}$ bis jetzt definirt sind. Aber $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\mathbf{S}$ sind ganze Functionen von $\operatorname{sn}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$, und können daher nach Potenzen von $\boldsymbol{u}$ in Reihen entwickelt werden, welche convergiren, sobald der absolute Werth von $\boldsymbol{u}$ kleiner als $m\boldsymbol{U}$ ist. Für die Werthe, die dem absoluten Betrage nach kleiner als $\boldsymbol{U}$ sind, convergirt ferner auch die Reihe, welche aus der für $(-k^2 \operatorname{sn}^2 \boldsymbol{u})$ durch zweimalige Integration hervorgeht, und die in dem Ausdrucke von $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$, der im vorhergehenden §. unter Nr. (23.) gegeben ist, den Exponenten von e bildet. Da nun die Exponential-Reihe eine *beständig* convergirende ist, so muß die für $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$ hervorgehende Reihe jedenfalls für die genannten Werthe von $\boldsymbol{u}$ convergiren. Die für $\mathrm{Al}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$, und somit auch die für $\mathrm{Al}^{mm}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$ muß es also, sobald der absolute Betrag von $\boldsymbol{u}$ kleiner als $m\boldsymbol{U}$ ist, und die Gleichungen (11.) lehren sodann, daß die Reihen für $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$ ebenfalls für diese Werthe von $\boldsymbol{u}$ noch convergent sind. Daraus folgt unmittelbar, daß diese letzteren Reihen *beständig* convergiren müssen, indem einerseits $m\boldsymbol{U}$ beliebig groß gemacht werden kann, und anderseits die Coefficienten der genannten Reihen in keinerlei Weise von m abhängen. Nach

der in §. 4. in Betreff der dort mit $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1, \ldots)$, $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{u}_1, \ldots)$, $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u}_1, \ldots)$, $\boldsymbol{G}'(\boldsymbol{u}_1, \ldots)$ bezeichneten Functionen gemachten Bemerkung gelten daher die Gleichungen (13.) jetzt für *alle* Werthe von $\boldsymbol{u}$; und wenn man nunmehr $\operatorname{sn}\boldsymbol{u}$, $\operatorname{cn}\boldsymbol{u}$, $\operatorname{dn}\boldsymbol{u}$ allgemein durch die Gleichungen (12.) definirt, so genügen dieselben nicht nur den Differential-Gleichungen

$$\frac{d\operatorname{sn}\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{u}} = \operatorname{cn}\boldsymbol{u}\ \operatorname{dn}\boldsymbol{u}, \qquad \frac{d\operatorname{cn}\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{u}} = -\operatorname{sn}\boldsymbol{u}\ \operatorname{dn}\boldsymbol{u}, \qquad \frac{d\operatorname{dn}\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{u}} = -k^2\operatorname{sn}\boldsymbol{u}\ \operatorname{cn}\boldsymbol{u},$$

sondern es haben für dieselben, die für hinlänglich kleine Werthe von $\boldsymbol{u}$ (in Folge der Gleichungen (11, 5)) mit den ursprünglich so bezeichneten und durch die Reihen (3.) dargestellten übereinstimmen, auch alle übrigen im Vorhergehenden entwickelten Gleichungen (namentlich Nr. 4, 6, 9) unbedingte Gültigkeit.

Verfährt man auf die im Vorstehenden angegebene Weise, so braucht man, um zur Entwicklung der elliptischen Functionen zu gelangen, nur einige wenige, auf die Convergenz der gewöhnlichen Potenz-Reihen sich beziehenden und sehr einfach zu erweisenden Sätze vorauszusetzen. (S. die mehrfach angeführte Abhandlung über die Facultäten, §. 7.) Dagegen sind die Formeln, welche $\operatorname{sn}\boldsymbol{u}$, $\operatorname{cn}\boldsymbol{u}$, $\operatorname{dn}\boldsymbol{u}$ durch $\operatorname{sn}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$, auszudrücken lehren, etwas genauer zu untersuchen, als sich dies bei den analogen, für die ***Abel'***schen Functionen geltenden füglich ausführen läßt. Aus diesem Grunde suchte ich die Ableitung der Functionen $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$ u. s. w. aus den ursprünglichen-Differential-Gleichungen von aller speciell auf den betrachteten Einzelfall sich beziehenden Rechnung möglichst frei zu machen, und kam so auf die im vorhergehenden §. befolgte Methode, deren allgemeinere Anwendbarkeit sich deutlich genug herausstellt.

§. 10.

Fortsetzung.

Die Bestimmung der Coefficienten in den Reihen-Entwicklungen von $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$ u. s. w. mit Hülfe der Gleichungen (§. 7, 26 oder 22, 23) ist zwar ausführbar, aber beschwerlich. Obgleich man nun wohl niemals zur *numerischen Berechnung* einer elliptischen Function sich dieser Reihen bedienen wird, so ist es doch nicht ohne Interesse, daß es zur wirklichen Darstellung derselben noch einen andern, die Rechnung ungemein erleichternden Weg giebt. ***Jacobi*** hat nämlich zur Bestimmung der im vorhergehenden §. mit $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\mathbf{S}$ bezeichneten Größen eine *lineare* Differential-Gleichung gegeben, in der dieselben außer nach $\operatorname{sn}\left(\frac{\boldsymbol{u}}{m}\right)$ oder $\boldsymbol{u}$, auch noch in Beziehung auf den Modul k differentiirt erscheinen. Da

nun die angeführten Ausdrücke für $m = \infty$, nach den Formeln (11.) des v. §., in $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$ übergehen, so muß es auch ähnliche partielle Differential-Gleichungen für diese Functionen geben. Man kann dieselben in einfacher Weise aus den obigen Gleichungen (18 – 21.) herleiten, und sie dann selbst wieder benutzen, um die erwähnten Gleichungen ***Jacobi's*** aus den unter Nr. 8. des v. §. aufgestellten herzuleiten (so wie auch die analogen, welche zur Bestimmung der Zähler und des Nenners in den Transformations-Formeln dienen und ebenfalls von ***Jacobi*** ohne Beweis mitgetheilt sind). Auch dieses habe ich in der erwähnten Arbeit ausgeführt; ich begnüge mich aber hier, nur die Ableitung der für $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$ u. s. w. geltenden partiellen Differential-Gleichungen selbst zu geben, und zwar aus dem Grunde, weil das Verfahren, *gegebene Differential-Gleichungen nach einer darin vorkommenden Constanten zu differentiiren, und durch Combinationen der so erhaltenen mit den ursprünglichen andere Gleichungen zu ermitteln, welche für die Reihen-Entwicklung der zu bestimmenden Größen eine geeignetere Form haben,* einer weitern Anwendbarkeit fähig sein dürfte.

Es werde

$$\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1 = p, \quad \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2 = q, \quad \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3 = r, \quad \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}) = s, \frac{Al(\boldsymbol{u})_1}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})} = \xi$$

gesetzt, so hat man (§. 8, 30)

$$(1.)\ \left(\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{u}}\right) = (1-\xi^2)(1-k^2\xi^2) = 1-(1+k^2)\,\xi^2 + k^2\xi^4,\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial \boldsymbol{u}^2} = -(1+k^2)\,\xi + 2k^2\xi^3.$$

Differentiirt man jetzt diese Gleichung, indem man ξ, sowie p, q, r, s als Functionen von $\boldsymbol{u}$ und k betrachtet, in Beziehung auf k, so erhält man

$$\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial \boldsymbol{u}\,\partial k} = \left(-(1+k^2)\xi + 2k^2\xi^3\right)\frac{\partial \xi}{\partial k} - k\xi^2(1-\xi^2),$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial \boldsymbol{u}\,\partial k} - \frac{\partial \xi}{\partial k} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial \boldsymbol{u}^2} = -k\xi^2(1-\xi^2),$$

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial k} : \dfrac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{u}}\right)}{\partial \boldsymbol{u}} = -\frac{k\xi^2}{1-k^2\xi^2} = -\frac{1}{k}\left(\frac{1}{1-k^2\xi^2} - 1\right).$$

Nach (§. 8, 17) hat man aber, indem $\mathrm{al}^2(\boldsymbol{u})_3 = 1 - k^2\xi^2$ ist,

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \log(1-k^2\xi^2)}{\partial \boldsymbol{u}^2} = k^2\xi^2 + \frac{1-k^2}{1-k^2\xi^2} - 1 = -\frac{\partial^2 \log s}{\partial \boldsymbol{u}^2} + \frac{1-k^2}{1-k^2\xi^2} - 1,$$

oder

$$\frac{1-k^2}{1-k^2\xi^2} = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial \log s}{\partial \boldsymbol{u}} + \frac{1}{2}\,\dfrac{\partial \log(1-k^2\xi^2)}{\partial \boldsymbol{u}} + \boldsymbol{u}\right)}{\partial \boldsymbol{u}}.$$

Multiplicirt man daher die zweitvorhergehende Gleichung noch mit $k(1-k^2)$, und integrirt in Beziehung auf $\boldsymbol{u}$, so kommt

$$k(1-k^2)\frac{\partial\xi}{\partial k} : \frac{\partial\xi}{\partial \boldsymbol{u}} = -\frac{\partial \log s}{\partial \boldsymbol{u}} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial \log(1-k^2\xi^2)}{\partial \boldsymbol{u}} - k^2\boldsymbol{u},$$

oder wenn man mit $\dfrac{\partial\xi}{\partial \boldsymbol{u}}$ multiplicirt, indem

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\partial \log(1-k^2\xi^2)}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \frac{\partial\xi}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{k^2\xi}{1-k^2\xi^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2 = k^2\xi(1-\xi^2)$$

ist,

$$(2.)\qquad k(1-k^2)\frac{\partial\xi}{\partial k} = k^2\xi(1-\xi^2) - \left(k^2\boldsymbol{u} + \frac{\partial \log s}{\partial \boldsymbol{u}}\right)\frac{\partial\xi}{\partial \boldsymbol{u}}.$$

Diese Gleichung multiplicire man mit $4k^2\xi$, so folgt, weil (§. 8, 18)

$$(3.)\qquad \frac{\partial^2 \log s}{\partial \boldsymbol{u}^2} + k^2\xi^2 = 0,$$

und daher

$$2k^2\xi\,\frac{\partial\xi}{\partial k} = -\frac{\partial^3 \log s}{\partial \boldsymbol{u}^2\,\partial k} - 2k\xi^2, \quad 2k^2\xi\frac{\partial\xi}{\partial \boldsymbol{u}} = -\frac{\partial^3 \log s}{\partial \boldsymbol{u}^3}$$

ist,

$$2k(1-k^2)\,\frac{\partial^3 \log s}{\partial \boldsymbol{u}^2\,\partial k} + 2k^2\boldsymbol{u}\,\frac{\partial^3 \log s}{\partial \boldsymbol{u}^3} + 2\frac{\partial \log s}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \frac{\partial^3 \log s}{\partial \boldsymbol{u}^3} + 4k^2\xi^2 - 4k^4\xi^4 = 0,$$

oder da

$$2k^2\boldsymbol{u}\,\frac{\partial^3 \log s}{\partial \boldsymbol{u}^3} = 2\frac{\partial^2\left(k^2\boldsymbol{u}\dfrac{\partial \log s}{\partial \boldsymbol{u}}\right)}{\partial \boldsymbol{u}^2} - 4k^2\,\frac{\partial^2 \log s}{\partial \boldsymbol{u}^2}$$

$$2\frac{\partial \log s}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \frac{\partial^3 \log s}{\partial \boldsymbol{u}^3} = \frac{\partial^2 \cdot \left(\dfrac{\partial \log s}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2}{\partial \boldsymbol{u}^2} - 2\left(\frac{\partial^2 \log s}{\partial \boldsymbol{u}^2}\right)^2$$

$$= \frac{\partial^2 \cdot \left(\dfrac{\partial \log s}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2}{\partial \boldsymbol{u}^2} - 2k^4\xi^4$$

ist,

$$\frac{\partial^2\left\{2k(1-k^2)\dfrac{\partial \log s}{\partial k} + 2k^2\boldsymbol{u}\dfrac{\partial \log s}{\partial \boldsymbol{u}} + \left(\dfrac{\partial \log s}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2\right\}}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 4k^2(1+k^2)\xi^2 - 6k^4\xi^4 = 0.$$

Aber

$$\frac{\partial^4 \log s}{\partial \boldsymbol{u}^4} = -2k^2\xi\frac{\partial^2 \xi}{\partial \boldsymbol{u}^2} - 2k^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2 = -2k^2 + 4k^2(1+k^2)\,\xi^2 - 6k^4\xi^4,$$

und man kann daher die vorstehende Gleichung zweimal in Beziehung auf $\boldsymbol{u}$ integriren, wodurch man

$$\frac{\partial^2 \log s}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k(1-k^2)\frac{\partial \log s}{\partial k} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial \log s}{\partial \boldsymbol{u}} + \left(\frac{\partial \log s}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2 + k^2\boldsymbol{u}^2 = 0$$

erhält. Durch Betrachtung der ersten Glieder in der Reihen-Entwicklung von s überzeugt man sich, daß bei keiner dieser Integrationen eine Constante hinzuzufügen ist. Multiplicirt man nun die vorstehende Gleichung noch mit s, so ergiebt sich die folgende lineare partielle Differential-Gleichung für s

(4.) $$\frac{\partial^2 s}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k} + k^2\boldsymbol{u}s = 0.$$

Setzt man nun in (2.) $\xi = \dfrac{p}{s}$, so ergiebt sich

$$k(1-k^2)\frac{s\dfrac{\partial p}{\partial k} - p\dfrac{\partial s}{\partial k}}{s^2} + \left(k^2\boldsymbol{u} + \frac{1}{s}\cdot\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}}\right)\frac{s\dfrac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}} - p\dfrac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}}}{s^2} - k^2\frac{p}{s} + k^2\frac{\boldsymbol{p}^3}{s^3} = 0,$$

oder wenn man mit $2ps^3$ multiplicirt,

$$ps^2\Big(2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k}\Big) - s\boldsymbol{p}^2\Big(2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\,\frac{\partial s}{\partial k}\Big)$$

$$+ 2ps\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}}\cdot\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}} - 2\boldsymbol{p}^2\Big(\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)^2 - 2k^2\boldsymbol{p}^2s^2 + 2k^2\boldsymbol{p}^4 = 0.$$

Aus der Gleichung (1.) aber folgt

$$s^2\Big(\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)^2 + \boldsymbol{p}^2\Big(\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)^2 - 2ps\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}}\cdot\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}} = s^4 - (1+k^2)\boldsymbol{p}^2s^2 + k^2\boldsymbol{p}^4,$$

und man erhält daher, wenn man vermittelst dieser Gleichung aus der vorhergehenden das Glied $\Big(2p\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}}\cdot\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)$ eliminirt,

$$ps^2\Big(2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2)p\Big) + s^2\Big(\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)^2 - s^4$$

$$= s\boldsymbol{p}^2\Big(2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k}\Big) + \boldsymbol{p}^2\Big(\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)^2 - k^2\boldsymbol{p}^4.$$

Aber (§. 8, 26) $\Big(\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial \boldsymbol{u}^2} + s^2$, $\Big(\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)^2 = s\frac{\partial^2 s}{\partial \boldsymbol{u}^2} + k^2\boldsymbol{p}^2$; daher verwandelt sich die vorstehende Gleichung in die folgende:

$$s\Big(\frac{\partial^2 p}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)p\Big)$$

$$= p\Big(\frac{\partial^2 s}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}}\Big),$$

woraus wegen der 4ten

(5.) $$\frac{\partial^2 p}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2+k^2\boldsymbol{u}^2)p = 0$$

folgt. Ferner hat man (§. 8, 27) $s^2 = \boldsymbol{p}^2 + q^2$, woraus sich

$$s\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}} = p\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}} + q\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{u}}, \quad s\frac{\partial s}{\partial k} = p\frac{\partial p}{\partial k} + q\frac{\partial q}{\partial k},$$

$$s\frac{\partial^2 s}{\partial \boldsymbol{u}^2} + \Big(\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial \boldsymbol{u}^2} + \Big(\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)^2 + q\frac{\partial^2 q}{\partial \boldsymbol{u}^2} + \Big(\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{u}}\Big)^2$$

findet, und da, wenn man in der dritten dieser Gleichungen

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial \boldsymbol{u}^2} + s^2, \qquad \left(\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2 = q\frac{\partial^2 q}{\partial \boldsymbol{u}^2} + r^2 = q\frac{\partial^2 q}{\partial \boldsymbol{u}^2} + s^2 - k^2\boldsymbol{p}^2,$$
$$\left(\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2 = s\frac{\partial^2 s}{\partial \boldsymbol{u}^2} + k^2\boldsymbol{p}^2$$

setzt, sich

$$s\frac{\partial^2 s}{\partial \boldsymbol{u}^2} = p\frac{\partial^2 p}{\partial \boldsymbol{u}^2} + (1-k^2)\boldsymbol{p}^2 + q\frac{\partial^2 q}{\partial \boldsymbol{u}^2} + q^2$$

ergiebt,

$$s\left(\frac{\partial^2 s}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k} + k^2\boldsymbol{u}^2 s\right)$$
$$= p\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2+k^2\boldsymbol{u}^2)p\right)$$
$$+q\left(\frac{\partial^2 q}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial q}{\partial k} + (1+k^2\boldsymbol{u}^2)q\right);$$

woraus mit Rücksicht auf (4, 5)

(6.) $$\frac{\partial^2 q}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial q}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial q}{\partial k} + (1+k^2\boldsymbol{u}^2)q = 0$$

folgt.

Endlich ist

$$s^2 = k^2\boldsymbol{p}^2 + r^2$$
$$s\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}} = k^2 p\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}} + r\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{u}}, \qquad s\frac{\partial s}{\partial k} = k^2 p\frac{\partial p}{\partial k} + r\frac{\partial r}{\partial k} + k\boldsymbol{p}^2$$
$$s\frac{\partial^2 s}{\partial \boldsymbol{u}^2} + \left(\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2 = k^2 p\frac{\partial^2 p}{\partial \boldsymbol{u}^2} + k^2\left(\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2 + r\frac{\partial^2 r}{\partial \boldsymbol{u}^2} + \left(\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2,$$

oder weil

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2 = s\frac{\partial^2 s}{\partial \boldsymbol{u}^2} + k^2\boldsymbol{p}^2, \qquad \left(\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2 = p\frac{\partial^2 p}{\partial \boldsymbol{u}^2} + s^2, \qquad \left(\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2 = r\frac{\partial^2 r}{\partial \boldsymbol{u}^2} + k^2s^2 - k^2\boldsymbol{p}^2,$$

$$\begin{aligned} s\left(\frac{\partial^2 s}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial s}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial s}{\partial k} + k^2\boldsymbol{u}^2 s\right) \\ = k^2 p\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial p}{\partial k} + (1-k^2+k^2\boldsymbol{u}^2)p\right) \\ + r\left(\frac{\partial^2 r}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial r}{\partial k} + (k^2+k^2\boldsymbol{u}^2)r\right), \end{aligned}$$

woraus

$$\text{(7.)} \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial r}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial r}{\partial k} + (k^2+k^2\boldsymbol{u}^2)r = 0$$

folgt. Mit Hülfe dieser Gleichungen (4 – 7), die hier nun noch einmal zusammengestellt werden mögen:

$$\text{(8.)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \operatorname{Al}(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial \operatorname{Al}(\boldsymbol{u})}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial \operatorname{Al}(\boldsymbol{u})}{\partial k} + k^2\boldsymbol{u}^2 \operatorname{Al}(\boldsymbol{u}) = 0 \\ &\frac{\partial^2 \operatorname{Al}(\boldsymbol{u})_1}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial \operatorname{Al}(\boldsymbol{u})_1}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial \operatorname{Al}(\boldsymbol{u})_1}{\partial k} + (1-k^2+k^2\boldsymbol{u}^2) \operatorname{Al}(\boldsymbol{u})_1 = 0 \\ &\frac{\partial^2 \operatorname{Al}(\boldsymbol{u})_2}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial \operatorname{Al}(\boldsymbol{u})_2}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial \operatorname{Al}(\boldsymbol{u})_2}{\partial k} + (1+k^2\boldsymbol{u}^2) \operatorname{Al}(\boldsymbol{u})_2 = 0 \\ &\frac{\partial^2 \operatorname{Al}(\boldsymbol{u})_3}{\partial \boldsymbol{u}^2} + 2k^2\boldsymbol{u}\frac{\partial \operatorname{Al}(\boldsymbol{u})_3}{\partial \boldsymbol{u}} + 2k(1-k^2)\frac{\partial \operatorname{Al}(\boldsymbol{u})_3}{\partial k} + (k^2+k^2\boldsymbol{u}^2) \operatorname{Al}(\boldsymbol{u})_3 = 0 \end{aligned} \right.$$

lassen sich nunmehr die Reihen für $\operatorname{Al}(\boldsymbol{u})$, $\operatorname{Al}(\boldsymbol{u})_1$, $\operatorname{Al}(\boldsymbol{u})_2$, $\operatorname{Al}(\boldsymbol{u})_3$ ohne Mühe entwickeln, wobei man noch mit Vortheil die leicht zu erweisenden Relationen

$$\text{(9.)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{Al}\left(k\boldsymbol{u}, \frac{1}{k}\right)_1 = k \operatorname{Al}(\boldsymbol{u}, k)_1 \quad \operatorname{Al}\left(k\boldsymbol{u}, \frac{1}{k}\right)_2 = \operatorname{Al}(\boldsymbol{u}, k)_3 \\ &\operatorname{Al}\left(k\boldsymbol{u}, \frac{1}{k}\right)_3 = \operatorname{Al}(\boldsymbol{u}, k)_2 \quad \operatorname{Al}\left(k\boldsymbol{u}, \frac{1}{k}\right) = \operatorname{Al}(\boldsymbol{u}, k) \end{aligned} \right.$$

benutzen kann. Die Resultate der leicht auszuführenden Rechnung sind folgende.

Es seien $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ ganze Zahlen, die unabhängig von einander alle Werthe von 0 bis $+\infty$ zu durchlaufen haben, so ist

$$(10.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}) = 1 - \mathbf{S}\left\{(-1)^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} k^{2\mathfrak{m}+2} \,.\, \dfrac{\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+4}}{(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+4)!}\right\} \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1 = \phantom{1 - {}} \mathbf{S}\left\{(-1)^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} k^{2\mathfrak{m}} \,.\, \dfrac{\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+1}}{(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+1)!}\right\} \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2 = 1 - \mathbf{S}\left\{(-1)^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} k^{2\mathfrak{m}} \,.\, \dfrac{\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+2}}{(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+2)!}\right\} \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3 = 1 - \mathbf{S}\left\{(-1)^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} k^{2\mathfrak{n}+2} \,.\, \dfrac{\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+2}}{(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+2)!}\right\}. \end{cases}$$

In diesen Formeln ist mit $\mathfrak{n}!$ das Product $(1\,.\,2\cdots\mathfrak{n})$ bezeichnet, und

$$a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} \quad b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} \quad c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}}$$

sind ganze Zahlen, welche vermittelst der folgenden Recursions-Formeln zu berechnen sind:

$$(11.)\quad \begin{cases} a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} = (4\mathfrak{m}+4)a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}-1} + (2\mathfrak{n}+4)a_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}} - (2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+1)(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}+2)a_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}-1} \\ b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} = (4\mathfrak{m}+1)b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}-1} + (2\mathfrak{n}+1)b_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}} - (2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}-2)(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}-1)b_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}-1} \\ c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} = (4\mathfrak{m}+1)c_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}-1} + (4\mathfrak{n}+4)c_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}} - (2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n}-1)(2\mathfrak{m}+2\mathfrak{n})c_{\mathfrak{m}-1,\mathfrak{n}-1}. \end{cases}$$

Beim Gebrauche dieser Formeln hat man

$$a_{0,0} = 2, \quad b_{0,0} = 1, \quad c_{0,0} = 1, \quad c_{1,0} = 2, \quad c_{0,1} = 1$$

zu setzen, so wie jedem Coefficienten, bei dem einer der Indices negativ wird, den Werth Null beizulegen. Ferner muß in der ersten $\mathfrak{m}+\mathfrak{n} > 0$, eben so in der zweiten, und in der dritten $\mathfrak{m}+\mathfrak{n} > 1$ sein. Auch ist

$$a_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} = a_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}} \qquad b_{\mathfrak{m},\mathfrak{n}} = b_{\mathfrak{n},\mathfrak{m}}.$$

Da es nützlich sein kann, die Reihen für $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$ u. s. w. in einer Anzahl von Gliedern wirklich dargestellt zu haben, so mögen hier noch für die 10 ersten Coefficienten derselben die vollständig berechneten Ausdrücke Platz finden.

$$\mathrm{Al}(\boldsymbol{u}) = 1 - \boldsymbol{A}_2\frac{\boldsymbol{u}^4}{4!} + \boldsymbol{A}_3\frac{\boldsymbol{u}^6}{6!} - \cdots + (-1)^{\mathfrak{m}-1}\boldsymbol{A}_{\mathfrak{m}}\frac{\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}}}{(2\mathfrak{m})!}\cdots$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_2 &= 2\,k^2 \\
\boldsymbol{A}_3 &= 8(k^2 + k^4) \\
\boldsymbol{A}_4 &= 32(k^2 + k^6) + 68\,k^4 \\
\boldsymbol{A}_5 &= 128(k^2 + k^8) + 480(k^4 + k^6) \\
\boldsymbol{A}_6 &= 512(k^2 + k^{10}) + 3008(k^4 + k^8) + 5400\,k^6 \\
\boldsymbol{A}_7 &= 2048(k^2 + k^{12}) + 17408(k^4 + k^{10}) + 49568(k^6 + k^8) \\
\boldsymbol{A}_8 &= 8192(k^2 + k^{14}) + 95232(k^4 + k^{12}) + 395520(k^6 + k^{10}) + 603376\,k^8 \\
\boldsymbol{A}_9 &= 32768(k^2 + k^{16}) + 499712(k^4 + k^{14}) + 2853888(k^6 + k^{12}) + 5668096(k^8 + k^{10}) \\
\boldsymbol{A}_{10} &= 131072(k^2 + k^{18}) + 2539520(k^4 + k^{16}) + 19097600(k^6 + k^{14}) \\
&\qquad + 38153728(k^8 + k^{12}) + 42090784\,k^{10}
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1 = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{B}_1\frac{\boldsymbol{u}^3}{3!} + \boldsymbol{B}_2\frac{\boldsymbol{u}^5}{5!} - \cdots + (-1)^{\mathfrak{m}}\boldsymbol{B}_{\mathfrak{m}}\frac{\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}+1}}{(2\mathfrak{m}+1)!}\cdots$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}_1 &= 1 + k^2 \\
\boldsymbol{B}_2 &= 1 + k^4 + 4\,k^2 \\
\boldsymbol{B}_3 &= 1 + k^6 + 9(k^2 + k^4) \\
\boldsymbol{B}_4 &= 1 + k^8 + 16(k^2 + k^6) - 6\,k^4 \\
\boldsymbol{B}_5 &= 1 + k^{10} + 25(k^2 + k^8) - 494(k^4 + k^6) \\
\boldsymbol{B}_6 &= 1 + k^{12} + 36(k^2 + k^{10}) - 5781(k^4 + k^8) - 12184\,k^6 \\
\boldsymbol{B}_7 &= 1 + k^{14} + 49(k^2 + k^{12}) - 55173(k^4 + k^{10}) - 179605(k^6 + k^8) \\
\boldsymbol{B}_8 &= 1 + k^{16} + 64(k^2 + k^{14}) - 502892(k^4 + k^{12}) - 2279488(k^6 + k^{10}) - 3547930\,k^8 \\
\boldsymbol{B}_9 &= 1 + k^{18} + 81(k^2 + k^{16}) - 4537500(k^4 + k^{14}) - 27198588(k^6 + k^{12}) \\
&\qquad - 59331498(k^8 + k^{10}) \\
\boldsymbol{B}_{10} &= 1 + k^{20} + 100(k^2 + k^{18}) - 40856715(k^4 + k^{16}) - 313180080(k^6 + k^{14}) \\
&\qquad - 909015270(k^8 + k^{12}) - 1278530856\,k^{10}
\end{aligned}$$

u. s. w.

$$\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2 = 1 - \boldsymbol{C}_1 \frac{\boldsymbol{u}^2}{2!} + \boldsymbol{C}_2 \frac{\boldsymbol{u}^4}{4!} - \cdots + (-1)^{\mathfrak{m}} \boldsymbol{C}_{\mathfrak{m}} \frac{\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}}}{(2\mathfrak{m})!} \cdots$$

$\boldsymbol{C}_1 = 1$

$\boldsymbol{C}_2 = 1 + 2k^2$

$\boldsymbol{C}_3 = 1 + 6k^2 + 8k^4$

$\boldsymbol{C}_4 = 1 + 12k^2 + 60k^4 + 32k^6$

$\boldsymbol{C}_5 = 1 + 20k^2 + 348k^4 + 448k^6 + 128k^8$

$\boldsymbol{C}_6 = 1 + 30k^2 + 2372k^4 + 4600k^6 + 2880k^8 + 512k^{10}$

$\boldsymbol{C}_7 = 1 + 42k^2 + 19308k^4 + 51816k^6 + 45024k^8 + 16896k^{10} + 2048k^{12}$

$\boldsymbol{C}_8 = 1 + 56k^2 + 169320k^4 + 628064k^6 + 757264k^8 + 370944k^{10} + 93184k^{12} + 8192k^{14}$

$\boldsymbol{C}_9 = 1 + 72k^2 + 1515368k^4 + 7594592k^6 + 12998928k^8 + 9100288k^{10} + 2725888k^{12} + 491520k^{14} + 32768k^{16}$

$\boldsymbol{C}_{10} = 1 + 90k^2 + 13623480k^4 + 89348080k^6 + 211064400k^8 + 219361824k^{10} + 100242944k^{12} + 18450432k^{14} + 2506752k^{16} + 131072k^{18}$

u. s. w.

$$\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3 = 1 - \boldsymbol{D}_1 \frac{\boldsymbol{u}^2}{2!} + \boldsymbol{D}_2 \frac{\boldsymbol{u}^4}{4!} - \cdots + (-1)^{\mathfrak{m}} \boldsymbol{D}_{\mathfrak{m}} \frac{\boldsymbol{u}^{2\mathfrak{m}}}{(2\mathfrak{m})!} \cdots$$

$\boldsymbol{D}_1 = k^2$

$\boldsymbol{D}_2 = 2k^2 + k^4$

$\boldsymbol{D}_3 = 8k^2 + 6k^4 + k^6$

$\boldsymbol{D}_4 = 32k^2 + 60k^4 + 12k^6 + k^8$

$\boldsymbol{D}_5 = 128k^2 + 448k^4 + 348k^6 + 20k^8 + k^{10}$

$\boldsymbol{D}_6 = 512k^2 + 2880k^4 + 4600k^6 + 2372k^8 + 30k^{10} + k^{12}$

$\boldsymbol{D}_7 = 2048k^2 + 16896k^4 + 45024k^6 + 51816k^8 + 19308k^{10} + 42k^{12} + k^{14}$

$\boldsymbol{D}_8 = 8192k^2 + 93184k^4 + 370944k^6 + 757264k^8 + 628064k^{10} + 169320k^{12} + 56k^{14} + k^{16}$

$\boldsymbol{D}_9 = 32768k^2 + 491520k^4 + 2725888k^6 + 9100288k^8 + 12998928k^{10} + 7594592k^{12} + 1515368k^{14} + 72k^{16} + k^{18}$

$\boldsymbol{D}_{10} = 131072k^2 + 2506752k^4 + 18450432k^6 + 100242944k^8 + 219361824k^{10} + 211064400k^{12} + 89348080k^{14} + 13623480k^{16} + 90k^{18} + k^{20}$

u. s. w.

Ordnet man diese Ausdrücke von $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$ u. s. w. nach Potenzen von k,

so erscheinen die Coefficienten als unendliche Reihen, die sich aber summiren lassen.

§. 11.

Uebergang zu den ***Jacobi***'schen Reihen.

Nunmehr möge gezeigt werden, wie man von den Functionen $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3$ aus zu den unendlichen Reihen gelangen kann, durch welche ***Jacobi*** die elliptischen Functionen auszudrücken gelehrt hat. Dabei nehme ich jedoch an, daß der absolute Betrag des Moduls k kleiner als Eins sei, was erlaubt ist, weil man vermittelst der Formeln

$$\mathrm{Al}\left(k\boldsymbol{u}, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}, k) \qquad \mathrm{Al}\left(k\boldsymbol{u}, \frac{1}{k}\right)_2 = \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}, k)_3$$
$$\mathrm{Al}\left(k\boldsymbol{u}, \frac{1}{k}\right)_1 = k\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u}, k)_1 \qquad \mathrm{Al}\left(k\boldsymbol{u}, \frac{1}{k}\right)_3 = \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}, k)_2$$

jede der 4 genannten Functionen, wenn der absolute Betrag des Moduls die Einheit übersteigt, auf eine andere zurückführen kann, bei welcher derselbe kleiner als 1 ist.

Es werde nun, unter dieser Voraussetzung,

$$(1.) \qquad \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\,\sqrt{1-k^2\xi^2}} = \boldsymbol{K}, \quad \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\,\sqrt{1-k^2\xi^2}} = \boldsymbol{K}'$$

gesetzt, wobei, um diesen Integralen eine ganz bestimmte Bedeutung zu geben, festgestellt werden möge, es solle bei beiden Integrationen für $\sqrt{1-k^2\xi^2}$ der durch die Reihe

$$1 - \frac{1}{2}k^2\,\xi^2 - \frac{1}{2\,.\,4}k^4\,\xi^4 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}k^6\,\xi^6 - \cdots$$

gegebene Werth dieser Wurzelgröße, und bei der ersten

$$\sqrt{1-\xi^2} = 1 - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2\,.\,4}\xi^4 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\xi^6 - \cdots,$$

so wie bei der zweiten

$$\sqrt{\xi^2-1} = \xi - \frac{1}{2}\xi^3 - \frac{1}{2\,.\,4}\xi^5 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\xi^7 - \cdots$$

genommen werden. Dann erhält man, wenn man die Reihe

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k^4+\cdots+\left(\frac{1\,.\,3\cdots(2n-1)}{2\,.\,4\cdots\quad 2n}\right)^2 k^{2n}+\cdots \quad \text{mit} \quad \mathfrak{K},$$

und die Summe ihrer $(n+1)$ ersten Glieder

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2+\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k^4+\cdots+\left(\frac{1\,.\,3\cdots(2n-1)}{2\,.\,4\cdots\quad 2n}\right)^2 k^{2n} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{K}_n$$

bezeichnet,

$$(2.)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{K} \;=\dfrac{\pi}{2}\mathfrak{K} \\ \boldsymbol{K}' = \mathfrak{K}\log\!\left(\dfrac{4}{k}\right)-(\mathfrak{K}-1)-\dfrac{2}{3\,.\,4}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_1)-\dfrac{2}{5\,.\,6}(\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_2)-\cdots, \end{cases}$$

und es ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$(3.)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn}(\boldsymbol{K})=1 & \operatorname{cn}(\boldsymbol{K})=0 & \operatorname{dn}(\boldsymbol{K})=k' \\ \operatorname{sn}(\boldsymbol{K}-i\boldsymbol{K}')=\dfrac{1}{k} & \operatorname{cn}(\boldsymbol{K}-i\boldsymbol{K}')=\dfrac{k'i}{k} & \operatorname{dn}(\boldsymbol{K}-i\boldsymbol{K}')=0, \end{cases}$$

in denen

$$(4.)\qquad k'=\sqrt{1-k^2}=1-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2\,.\,4}k^4-\cdots$$

ist.

Die Herleitung derselben, so wie auch die Entwicklung der Reihen für $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}'$, muß bei dem hier eingeschlagenen Wege, die Theorie der elliptischen Functionen zu begründen, in einer etwas andern als der gewöhnlichen Weise geschehen. Doch gehe ich hierauf nicht näher ein, sondern verweise auf das folgende Kapitel, wo man alles, was hier zu bemerken wäre, in den daselbst anzustellenden allgemeinern Untersuchungen gehörig erörtert finden wird.

Die Formeln für $\operatorname{sn}(\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{v})$, $\operatorname{cn}(\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{v})$, $\operatorname{dn}(\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{v})$ führen sodann, wenn man

$v = K$, und $v = K - iK'$ setzt, zu den Relationen

$$(5.)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+K) = \dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} & \operatorname{sn}(u-K) = -\dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \\ \operatorname{cn}(u+K) = \dfrac{-k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} & \operatorname{cn}(u-K) = \dfrac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} \\ \operatorname{dn}(u+K) = \dfrac{k'}{\operatorname{dn} u} & \operatorname{dn}(u-K) = \dfrac{k'}{\operatorname{dn} u} \end{cases}$$

$$(6.)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+K-iK') = \dfrac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{cn} u} & \operatorname{sn}(u-K+iK') = -\dfrac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{cn} u} \\ \operatorname{cn}(u+K-iK') = \dfrac{k' i}{k \operatorname{cn} u} & \operatorname{cn}(u-K+iK') = \dfrac{k' i}{k \operatorname{cn} u} \\ \operatorname{dn}(u+K-iK') = -\dfrac{ik' \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u} & \operatorname{dn}(u-K+iK') = \dfrac{ik' \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}. \end{cases}$$

Und wenn man in diesen letztern Formeln $u - K$, sowie auch $u + K$ für u setzt, so erhält man

$$(7.)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+iK') = \dfrac{1}{k \operatorname{sn} u} & \operatorname{sn}(u-iK') = \dfrac{1}{k \operatorname{sn} u} \\ \operatorname{cn}(u+iK') = \dfrac{-i \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} & \operatorname{cn}(u-iK') = \dfrac{i \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u} \\ \operatorname{dn}(u+iK') = \dfrac{-i \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u} & \operatorname{dn}(u-iK') = \dfrac{i \operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}. \end{cases}$$

Aus (5, 7) folgt nun

$$(8.)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+K) = -\operatorname{sn}(u-K) & \operatorname{sn}(u+iK') = \operatorname{sn}(u-iK') \\ \operatorname{cn}(u+K) = -\operatorname{cn}(u-K) & \operatorname{cn}(u+iK') = -\operatorname{cn}(u-iK') \\ \operatorname{dn}(u+K) = \operatorname{dn}(u-K) & \operatorname{dn}(u+iK') = -\operatorname{dn}(u-iK') \end{cases}$$

und hieraus, indem man $u + K$ und $u + iK'$ für u setzt,

$$(9.)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+2K) = -\operatorname{sn} u & \operatorname{sn}(u+2iK') = \operatorname{sn} u \\ \operatorname{cn}(u+2K) = -\operatorname{cn} u & \operatorname{cn}(u+2iK') = -\operatorname{cn} u \\ \operatorname{dn}(u+2K) = \operatorname{dn} u & \operatorname{dn}(u+2iK') = -\operatorname{dn} u. \end{cases}$$

Diese Gleichungen führen endlich zu den folgenden allgemeinern, in denen $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ beliebige ganze Zahlen bedeuten:

$$(10.)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn}(\boldsymbol{u} + 2\mathfrak{m}\boldsymbol{K} + 2\mathfrak{n}i\boldsymbol{K}') = (-1)^{\mathfrak{m}} \operatorname{sn} \boldsymbol{u} \\ \operatorname{cn}(\boldsymbol{u} + 2\mathfrak{m}\boldsymbol{K} + 2\mathfrak{n}i\boldsymbol{K}') = (-1)^{\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} \operatorname{cn} \boldsymbol{u} \\ \operatorname{dn}(\boldsymbol{u} + 2\mathfrak{m}\boldsymbol{K} + 2\mathfrak{n}i\boldsymbol{K}') = (-1)^{\mathfrak{n}} \operatorname{dn} \boldsymbol{u}. \end{cases}$$

Man hat ferner, wenn man

$$\frac{d\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}{d\boldsymbol{u}} \quad \text{mit } \mathrm{Al}'(\boldsymbol{u}) \text{ bezeichnet,}$$

$$(11.)\qquad d\,\frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{u})}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})} = -k^2 \operatorname{sn}^2 \boldsymbol{u}\, d\boldsymbol{u},$$

oder wenn

$$\xi = \operatorname{sn} \boldsymbol{u},$$

$$(12.)\qquad d\,\frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{u})}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})} = \frac{k^2\xi^2\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-k^2\xi^2}}.$$

Wird daher

$$(13.)\qquad \int_0^1 \frac{k^2\xi^2\, d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-k^2\xi^2}} = \boldsymbol{J}, \quad \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{k^2\xi^2\, d\xi}{\sqrt{\xi^2-1}\sqrt{1-k^2\xi^2}} = \boldsymbol{J}',$$

gesetzt, mit der Bestimmung, daß bei jeder dieser Integrationen ξ und die Wurzelgrößen dieselben Werthe durchlaufen sollen, wie bei der entsprechenden, durch welche man bezieht. $\boldsymbol{K}$ oder $\boldsymbol{K}'$ findet; so ergiebt sich

$$(14.)\qquad \frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{K})}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{K})} = -\boldsymbol{J} \quad \frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{K}-i\boldsymbol{K}')}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{K}-i\boldsymbol{K}')} = -\boldsymbol{J} + i\boldsymbol{J}'.$$

Aus den Gleichungen (11, 8) aber folgt

$$d\frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{K})}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{K})} = d\frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{K})}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{K})},$$

und daher

$$\frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{K})}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{K})} = \frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{K})}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{K})} + \boldsymbol{C},$$

wo $\boldsymbol{C}$ eine von $\boldsymbol{u}$ unabhängige Größe bedeutet. Indem man $\boldsymbol{u} = 0$ nimmt, und bemerkt, daß $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$ eine gerade, $\mathrm{Al}'(\boldsymbol{u})$ aber eine ungerade Function von $\boldsymbol{u}$ ist, findet sich

$$\boldsymbol{C} = \frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{K})}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{K})} - \frac{\mathrm{Al}'(-\boldsymbol{K})}{\mathrm{Al}(-\boldsymbol{K})} = 2\frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{K})}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{K})} = -2\boldsymbol{J}.$$

Setzt man nun in der vorhergehenden Gleichung $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}$ für $\boldsymbol{u}$, so ergiebt sich

$$\frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{K})}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{K})} = \frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{u})}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})} - 2\boldsymbol{J}. \tag{15.}$$

In ganz ähnlicher Weise findet sich

$$\frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{K} - 2i\boldsymbol{K}')}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{K} - 2i\boldsymbol{K}')} = \frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{u})}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})} - 2\boldsymbol{J} + 2i\boldsymbol{J}'. \tag{16.}$$

Und wenn man in dieser Gleichung $\boldsymbol{u} + 2i\boldsymbol{K}'$ an die Stelle von $\boldsymbol{u}$ setzt, so kommt

$$\frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{u} + 2i\boldsymbol{K}')}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2i\boldsymbol{K}')} = \frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{u})}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})} - 2i\boldsymbol{J}', \tag{17.}$$

worauf man dann aus (15, 17) die allgemeinere Relation

$$\frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{u} + 2\mathfrak{m}\boldsymbol{K} + 2\mathfrak{n}i\boldsymbol{K}')}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\mathfrak{m}\boldsymbol{K} + 2\mathfrak{n}i\boldsymbol{K}')} = \frac{\mathrm{Al}'(\boldsymbol{u})}{\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})} - 2\mathfrak{m}\boldsymbol{J} + 2\mathfrak{n}i\boldsymbol{J}' \tag{18.}$$

herleiten kann.

Jetzt werde zur Abkürzung

$$\begin{cases} \mathfrak{m}\boldsymbol{K} + \mathfrak{n}i\boldsymbol{K}' = \omega \\ \mathfrak{m}\boldsymbol{J} + \mathfrak{n}i\boldsymbol{J}' = \eta \end{cases} \tag{19.}$$

gesetzt. Dann folgt aus der vorstehenden Gleichung

$$\mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\omega) = \boldsymbol{C} \,.\, e^{-2\eta\boldsymbol{u}}\, \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}),$$

wo $\boldsymbol{C}$ eine Constante bedeutet. Zur Bestimmung derselben setze man $\boldsymbol{u} = -\omega$, so findet sich

$$\mathrm{Al}(\omega) = \boldsymbol{C}e^{2\eta\omega}\, \mathrm{Al}(-\omega) = \boldsymbol{C}e^{2\eta\omega}\, \mathrm{Al}(\omega),$$

und daher, wofern nicht $\mathrm{Al}(\omega) = 0$ ist, $\boldsymbol{C} = e^{-2\eta\omega}$. Es wird aber, wie aus der Gleichung

$$\frac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})}{d\boldsymbol{u}^2} = -k^2 \,\mathrm{sn}^2\, \boldsymbol{u}$$

folgt, $\mathrm{Al}(\omega)$ nur dann $= 0$, wenn $\mathrm{sn}\,\omega = \infty$ ist; was, wie die Formeln (7, 10) lehren, nur der Fall ist, wenn für $\mathfrak{m}$ eine gerade und für $\mathfrak{n}$ eine ungerade Zahl angenommen wird. Dann aber ist, wie die Gleichung

$$\frac{d^2 \log \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1}{d\boldsymbol{u}^2} = -\frac{1}{\mathrm{sn}^2\,\boldsymbol{u}}$$

zeigt, $\mathrm{Al}(\omega)_1$ nicht $= 0$; und da man, nach (10.), jetzt $\mathrm{sn}(\boldsymbol{u} + 2\omega) = \mathrm{sn}\,\boldsymbol{u}$ hat, und somit aus der vorstehenden Gleichung für $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\omega)$

$$\mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\omega)_1 = \boldsymbol{C} e^{-2\eta \boldsymbol{u}}\, \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1$$

folgt, so findet sich jetzt, wenn man wieder $\boldsymbol{u} = -\omega$ setzt, $\boldsymbol{C} = -e^{-2\eta\omega}$. Demgemäß hat man

$$\mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\omega) = \pm e^{-2\eta(\boldsymbol{u}+\omega)}\, \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}),$$

in welcher Gleichung das untere Zeichen gilt, wenn $\mathfrak{m}$ gerade und gleichzeitig $\mathfrak{n}$ ungerade, oder wenn das Product $(\mathfrak{m} + 1)\mathfrak{n}$ ungerade ist. Daher

$$\mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\omega) = (-1)^{(\mathfrak{m}+1)\mathfrak{n}} e^{-2\eta(\boldsymbol{u}+\omega)}\, \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}).$$

Verbindet man nun mit dieser Gleichung die unter (10.) aufgestellten, so ergeben sich für die Functionen $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3$ folgende Relationen:

$$(20.)\qquad \begin{cases} \mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\omega) \;\; = (-1)^{\mathfrak{mn}+\mathfrak{n}} e^{-2\eta(\boldsymbol{u}+\omega)}\, \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}) \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\omega)_1 = (-1)^{\mathfrak{mn}+\mathfrak{m}+\mathfrak{n}} e^{-2\eta(\boldsymbol{u}+\omega)}\, \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1 \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\omega)_2 = (-1)^{\mathfrak{mn}+\mathfrak{m}} e^{-2\eta(\boldsymbol{u}+\omega)}\, \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2 \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\omega)_3 = (-1)^{\mathfrak{mn}} e^{-2\eta(\boldsymbol{u}+\omega)}\, \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3\,. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sprechen charakteristische Eigenschaften der Functionen $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$ u. s. w. aus, und führen in einfacher Weise zur Darstellung derselben durch die ***Jacobi***'schen Reihen. Dabei ist die bekannte unter den Größen $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}'$, $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{J}'$ statt findende Relation von wesentlicher Bedeutung, die man aus den vorhergehenden Formeln folgendermaßen erhält.

Aus (20.) folgt

$$\mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{K})_3 = e^{-2\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{K})}\, \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3$$
$$\mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2i\boldsymbol{K}')_3 = e^{-2i\boldsymbol{J}'(\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{K}')}\, \mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3.$$

Setzt man in der ersten dieser Gleichungen $\boldsymbol{u} + 2i\boldsymbol{K}'$, und in der andern $\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{K}$ für $\boldsymbol{u}$, so kommt

$$\begin{aligned} \mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{K} + 2i\boldsymbol{K}')_3 &= e^{-2\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}+2i\boldsymbol{K}'+\boldsymbol{K})}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2i\boldsymbol{K}')_3 \\ &= e^{-2\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}+2i\boldsymbol{K}'+\boldsymbol{K})-2i\boldsymbol{J}'(\boldsymbol{u}+i\boldsymbol{K}')}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3, \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{K} + 2i\boldsymbol{K}')_3 &= e^{-2i\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{K}+i\boldsymbol{K}')}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{K})_3 \\ &= e^{-2i\boldsymbol{J}'(\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{K}+i\boldsymbol{K}')-2\boldsymbol{J}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{K})}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3. \end{aligned}$$

Folglich muß

$$\begin{aligned} e^{-4\boldsymbol{J}\boldsymbol{K}'i} &= e^{-4\boldsymbol{K}\boldsymbol{J}'i} \\ e^{4(\boldsymbol{K}\boldsymbol{J}'-\boldsymbol{J}\boldsymbol{K}')i} &= 1, \end{aligned}$$

d. h. es muß

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{J}' - \boldsymbol{J}\boldsymbol{K}' = \mu\,\frac{\pi}{2}$$

sein, wo μ eine ganze Zahl bedeutet. Nun aber erhält man, wenn man die Größen $\boldsymbol{J}$, $\boldsymbol{J}'$ in ähnlicher Weise wie $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}'$ in Reihen entwickelt

$$\text{(21.)}\qquad \begin{cases} \boldsymbol{J} = \dfrac{\pi}{2}\mathfrak{J} \\ \boldsymbol{J}' = \mathfrak{J}\log\dfrac{4}{k} + 1 - (\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_1) - \dfrac{2}{3\cdot 4}(\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_2) - \dfrac{2}{5\cdot 6}(\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_3) - \cdots \end{cases}$$

wo

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{3}{4}\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 k^4 + \tfrac{5}{6}\Big(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\Big)^2 k^6 + \tfrac{7}{8}\Big(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\Big)^2 k^8 + \cdots \\ \mathfrak{J}_1 &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}k^2, \qquad \mathfrak{J}_2 = \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 k^4 \quad \text{etc.} \\ \mathfrak{J}_n &= \tfrac{1}{2}k^2 + \tfrac{3}{4}\Big(\frac{1}{2}\Big)^2 k^4 + \cdots + \frac{2n-3}{2n-2}\Big(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-5)}{2\cdot 4\cdots(2n-4)}\Big)^2 k^{2n-2} \\ &\qquad + \tfrac{1}{2}\,\frac{2n-1}{2n}\Big(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n-2)}\Big)^2 k^{2n} \end{aligned}$$

ist; und man hat daher

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{K}' &= \frac{2\boldsymbol{K}}{\pi}\log\Big(\frac{4}{k}\Big) + \\ \boldsymbol{J}' &= 1 + \frac{2\boldsymbol{J}}{\pi}\log\Big(\frac{4}{k}\Big) + \end{aligned}\right\}\quad \text{Glieder, welche für } k = 0 \text{ verschwinden.}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die vorstehende Gleichung, so findet sich, daß $\mu = 1$ ist. Mithin hat man

(22.) $$\boldsymbol{KJ'} - \boldsymbol{JK'} = \frac{\pi}{2},$$

aus welcher Gleichung sich, wenn man

$$\omega = \mathfrak{m}\boldsymbol{K} + \mathfrak{n}i\boldsymbol{K'} \qquad \eta = \mathfrak{m}\boldsymbol{J} + \mathfrak{n}i\boldsymbol{J'}$$
$$\omega' = \mathfrak{m}'\boldsymbol{K} + \mathfrak{n}'i\boldsymbol{K'} \qquad \eta' = \mathfrak{m}'\boldsymbol{J} + \mathfrak{n}'i\boldsymbol{J'}$$

setzt, und nun unter $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ ganz willkührliche Größen versteht, die allgemeinere

(23.) $$\omega\,\eta' - \eta\,\omega' = (\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}' - \mathfrak{n}\,\mathfrak{m}')\,\frac{\pi}{2}i$$

ergiebt.

§. 12.

Fortsetzung.

Man bezeichne jetzt mit $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ irgend eine der Functionen $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3$, so hat man nach dem Vorhergehenden, wenn $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ zwei beliebige ganze Zahlen bedeuten, und

$$\mathfrak{m}\boldsymbol{K} + \mathfrak{n}i\boldsymbol{K'} = \omega \qquad \mathfrak{m}\boldsymbol{J} + \mathfrak{n}i\boldsymbol{J'} = \eta$$

gesetzt wird,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u} + 2\omega) = e^{-2\eta(\boldsymbol{u}+\omega)+m\pi i}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}),$$

wo m für jede Function durch die Formeln (20.) bestimmt ist. Diese Gleichung läßt sich folgendermaßen darstellen:

$$e^{\frac{\eta}{2\omega}(\boldsymbol{u}+2\omega)^2 - \frac{m\pi i}{2\omega}(\boldsymbol{u}+2\omega)}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u} + 2\omega) = e^{\frac{\eta \boldsymbol{u}^2}{2\omega} - \frac{m\pi i}{2\omega}\boldsymbol{u}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}),$$

und zeigt dann, daß

$$e^{\frac{\eta \boldsymbol{u}^2}{2\omega} - \frac{m\pi i}{2\omega}\boldsymbol{u}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$$

eine *periodische* Function von $\boldsymbol{u}$ ist. Nun gilt aber folgender allgemeiner Satz:

Eine eindeutige periodische Function einer unbeschränkt veränderlichen Größe $\boldsymbol{u}$ *läßt sich, mag nun die Periode, die durch a bezeichnet werde, reell oder imaginär sein, wenn sie zugleich den Charakter einer ganzen rationalen Function – in dem oben erklärten Sinne des Worts – besitzt, stäts, und zwar nur auf eine einzige Weise, durch eine für jeden Werth von* $\boldsymbol{u}$ *convergirende Reihe von der Form*

$$\sum_{\nu}\left\{\boldsymbol{A}_{\nu}\, e^{\frac{2\nu\pi}{a}\boldsymbol{u}i}\right\}$$

darstellen, wo der Zeiger ν*, auf den sich das Summenzeichen bezieht, die Reihe der ganzen Zahlen von* $-\infty$ *bis* $+\infty$ *durchlaufen hat, und die Coefficienten* $\boldsymbol{A}_{\nu}$ *von* $\boldsymbol{u}$ *unabhängig sind.*

Zum Beweise werde die Function, in welche die in Rede stehende durch die Substitution

$$\boldsymbol{u} = \frac{a}{2\pi}\boldsymbol{v}$$

übergeht, mit $f(\boldsymbol{v})$ bezeichnet, so hat man

$$f(\boldsymbol{v} + 2\pi) = f(\boldsymbol{v}).$$

Setzt man nun

$$\boldsymbol{v} = t + si,$$

und versteht unter t, s reelle Größen, so hat man nach dem ***Fourier***'schen Satze, indem $f(t+si)$ eine continuirliche Function von t, s ist, welche in Beziehung auf t die Periode 2π besitzt,

$$2\pi i \,.\, f(t+si) = \sum \boldsymbol{B}_{\nu}\, e^{\nu t i},$$

wo

$$\boldsymbol{B}_{\nu} \int_0^{2\pi} f(t+si)\, e^{-\nu t i}\, dt$$

ist. Zugleich weiß man, daß sich $f(t+si)$ auf keine andere Weise in dieser Form darstellen läßt. Nun ist aber nicht nur $f(t+si)$ eine continuirliche Function von t, s, sondern auch, nach dem, was hinsichtlich des analytischen Charakters von $f(\boldsymbol{v})$ angenommen worden ist,

$$\frac{\partial f(t+si)}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(t+si)}{\partial s} = i\,\frac{\partial f(t+si)}{\partial t}.$$

Mithin müssen auch $\boldsymbol{B}_\nu$ und $\dfrac{\partial \boldsymbol{B}_\nu}{\partial s}$ continuirliche Functionen von s sein, und man hat daher

$$\begin{aligned}\frac{\partial \,.\, \boldsymbol{B}_\nu\, e^{\nu s}}{\partial s} &= \frac{\partial \int_0^{2\pi} f(t+si)\, e^{-\nu(t+si)i}\, dt}{\partial s}\\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f(t+si)}{\partial s} + \nu f(t+si)\right) e^{-\nu(t+si)i}\, dt.\end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\partial f(t+si)}{\partial s}\, e^{-\nu(t+si)i}\, dt &= i \int_0^{2\pi} \frac{\partial f(t+si)}{\partial t}\, e^{-\nu(t+si)i}\, dt\\ &= -\nu \int_0^{2\pi} f(t+si)\, e^{-\nu(t+si)i}\, dt,\end{aligned}$$

indem $f(t+si)\, e^{-\nu(t+si)i}$ für $t = 0$ und $t = 2\pi$ denselben Werth hat. Daher ist

$$\frac{\partial \,.\, \boldsymbol{B}_\nu\, e^{\nu s}}{\partial s} = 0,$$

d. h. der Werth von $\boldsymbol{B}_\nu\, e^{\nu s}$ ist unabhängig von s, und bleibt, weil $\boldsymbol{B}_\nu$ eine continuirliche Function dieser Größe ist, für jeden Werth von s derselbe. Bezeichnet man ihn durch $2\pi i \boldsymbol{A}_\nu$, wo man dann, indem $s = 0$ genommen wird,

$$2\pi i \boldsymbol{A}_\nu = \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-\nu t i}\, dt$$

erhält, so ist

$$\boldsymbol{B}_\nu = 2\pi i \boldsymbol{A}_\nu\, e^{-\nu s},$$

und es ergiebt sich

$$f(t+si) = \sum_\nu \boldsymbol{A}_\nu\, e^{\nu(t+si)i}$$

für alle Werthe von t, s, oder

$$f(v) = \sum_\nu \boldsymbol{A}_\nu\, e^{\nu v i}$$

für jeden complexen Werth von v, woraus, wenn man $\frac{2\pi u}{a}$ für v setzt, die angegebene Reihe für die ursprüngliche Function sich unmittelbar ergiebt*) .

Uebrigens ist leicht zu zeigen, daß sich eine Reihe von der betrachteten Form, wenn sie für *jeden* Werth von u convergirt, immer in eine andere von der Gestalt

$$\sum_{\nu = 0 \dots \infty} \left\{ A'_\nu u^\nu \right\},$$

die ebenfalls beständig convergent ist, umwandeln läßt; woraus erhellt, daß der bewiesene Satz eben nur dann gilt, wenn die Function, um die es sich handelt, den Charakter einer ganzen rationalen hat.

Hiernach läßt sich

$$e^{\frac{\eta u^2}{2\omega} - \frac{m\pi i}{2\omega} u} F(u)$$

in eine beständig convergirende Reihe

$$\sum_{\nu} \left\{ A_\nu e^{\frac{\nu \pi u i}{\omega}} \right\}$$

entwickeln, und es handelt sich jetzt um die Bestimmung der Coefficienten derselben. Dazu gelangt man auf folgende Weise. Man darf unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Dann kann man zwei andere ganze Zahlen $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ dergestalt bestimmen, daß

$$\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}' - \mathfrak{n}\,\mathfrak{m}' = 1$$

ist, und es gelten, wenn man mit ω', η', m' die Größen bezeichnet, in welche ω, η, m übergehn, indem $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ an die Stelle von $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ treten, für $F(u)$ die beiden

---

*) Setzt man $e^{\frac{2\pi u i}{a}} = x$, so gehören zu jedem Werthe von x zwar unendlich viele von u, für die aber, da sie sich nur um ein Vielfaches von a unterscheiden, die betrachtete Function denselben Werth hat. Man kann daher die letztere als eine eindeutige Function von x ansehn, die durch $\varphi(x)$ bezeichnet werden möge. Dann ist leicht zu zeigen, daß nicht nur $\varphi(x)$, sondern auch $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}$ sich continuirlich mit x ändert, ohne jemals unendlich groß zu werden, sobald man nur für den absoluten Betrag von x irgend eine, wenn auch noch so kleine Gränze festsetzt, oberhalb welcher er bleiben soll. Dies reicht aber, nach einem von ***Cauchy*** gegebenen Theorem hin, um nachzuweisen, daß sich $\varphi(x)$ durch eine für jeden Werth von x, der nicht Null ist, convergirende Reihe

$$\sum_{\nu = -\infty \cdots + \infty} \{ A_\nu x^\nu \}$$

darstellen läßt; woraus der aufgestellte Satz unmittelbar folgt. Ich habe es aber hier vorgezogen, denselben aus dem ***Fourier***'schen abzuleiten.

Gleichungen

$$(1.)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}+2\omega) = e^{-2\eta(\boldsymbol{u}+\omega)+m\pi i}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}+2\omega') = e^{-2\eta'(\boldsymbol{u}+\omega')+m'\pi i}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}), \end{cases}$$

während zugleich die Größen $\omega, \eta, \omega', \eta'$ der Formel (23.) des v. §. gemäß durch die Relation

$$(2.)\qquad \omega\,\eta' - \eta\,\omega' = \frac{\pi}{2}i$$

mit einander verbunden sind. Man kann dabei bemerken, daß diese Gleichungen bestehen bleiben, wenn

$$\begin{array}{rcccccc} & \omega', & -\omega, & \eta', & -\eta, & m', & -m \\ \text{an die Stelle von} & \omega, & \omega', & \eta, & \eta', & m, & m' \end{array}$$

treten, wie man sofort sieht, sobald man nur in der ersten $\boldsymbol{u}-2\omega$ für $\boldsymbol{u}$ setzt, und $e^{-2\eta(\boldsymbol{u}-\omega)+m\pi i}$ auf die andere Seite bringt. Man wird daher aus jeder Gleichung, welche eine Folge der vorstehenden (1, 2) ist, sofort eine neue ableiten können, indem man in ihr die angegebenen Substitutionen macht.

Es werde jetzt

$$(3.)\qquad \frac{\eta'\boldsymbol{u}^2}{2\omega'} - \frac{\eta\boldsymbol{u}^2}{2\omega} = \frac{\pi i\boldsymbol{u}^2}{4\omega\omega'} \quad \text{mit} \quad \chi(\boldsymbol{u})$$

bezeichnet, und

$$(4.)\qquad e^{\frac{\eta\boldsymbol{u}^2}{2\omega}+\chi(\boldsymbol{u}-m'\omega)}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u})$$

$$(5.)\qquad e^{\frac{\eta'\boldsymbol{u}^2}{2\omega'}-\chi(\boldsymbol{u}-m\omega')}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = f'(\boldsymbol{u})$$

gesetzt. Dann hat man für beliebige Werthe von p, q

$$(6.)\qquad \begin{cases} \chi(\boldsymbol{u}+p\omega) - \chi(\boldsymbol{u}) = \dfrac{p\pi i}{2\omega'}\Big(\boldsymbol{u}+\dfrac{p\omega}{2}\Big) \\[2ex] \chi(\boldsymbol{u}+p\omega') - \chi(\boldsymbol{u}) = \dfrac{q\pi i}{2\omega}\Big(\boldsymbol{u}+\dfrac{q\omega'}{2}\Big), \end{cases}$$

woraus weiter

$$(7.)\qquad \begin{cases} \chi(\boldsymbol{u}+p\omega+q\omega') - \chi(\boldsymbol{u}+q\omega') = \chi(\boldsymbol{u}+p\omega) - \chi(\boldsymbol{u}) + \dfrac{pq}{2}\pi i, \quad \text{oder} \\[2ex] \chi(\boldsymbol{u}+p\omega+q\omega') - \chi(\boldsymbol{u}+p\omega) = \chi(\boldsymbol{u}+q\omega') - \chi(\boldsymbol{u}) + \dfrac{pq}{2}\pi i \end{cases}$$

folgt.

Die Gleichung (4.) läßt sich nun auch so schreiben:

$$f(\boldsymbol{u}) = e^{\frac{\eta' \boldsymbol{u}^2}{2\omega'} + \chi(\boldsymbol{u} - m'\omega) - \chi(\boldsymbol{u})} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}),$$

und man hat daher, indem

$$\frac{\eta'(\boldsymbol{u} + 2\omega')^2}{2\omega'} = \frac{\eta' \boldsymbol{u}^2}{2\omega'} + 2\eta'(\boldsymbol{u} + \omega'),$$

und nach (7.), wenn $p = -m'$, $q = 2$ genommen wird

$$\chi(\boldsymbol{u} - m'\omega + 2\omega') - \chi(\boldsymbol{u} + 2\omega') = \chi(\boldsymbol{u} - m'\omega) - \chi(\boldsymbol{u}) - m'\pi i$$

ist, in Folge von (1.)

(8.) $$f(\boldsymbol{u} + 2\omega') = f(\boldsymbol{u}).$$

Ebenso, oder wenn man die vorhin angegebenen Substitutionen macht, wodurch sich $\chi(\boldsymbol{u})$ in $-\chi(\boldsymbol{u})$, $f(\boldsymbol{u})$ in $f'(\boldsymbol{u})$ und $f'(\boldsymbol{u})$ in $f(\boldsymbol{u})$ verwandelt, erhält man

(9.) $$f'(\boldsymbol{u} - 2\omega) = f'(\boldsymbol{u}), \text{ oder auch } f'(\boldsymbol{u} + 2\omega) = f'(\boldsymbol{u}).$$

Ferner folgt aus (4.), wenn man bemerkt, daß nach (7.)

$$\chi(\boldsymbol{u} - m'\omega + m\omega') = \chi(\boldsymbol{u} + m\omega') + \chi(\boldsymbol{u} - m\omega') - \chi(\boldsymbol{u}) - \frac{mm'}{2}\pi i$$

ist, und

(10.) $$m\omega' - m'\omega = \overset{0}{\omega}$$

setzt,

(11.) $$\begin{cases} f(\boldsymbol{u}) = e^{\frac{mm'}{2}\pi i + \chi(\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega})} f'(\boldsymbol{u}), \\ f'(\boldsymbol{u}) = e^{-\frac{mm'}{2}\pi i - \chi(\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega})} f(\boldsymbol{u}). \end{cases}$$

Der Gleichung (9.) gemäß kann man nun $f'(\boldsymbol{u})$ durch eine Reihe

$$\sum_{\nu} \left\{ \boldsymbol{A}_\nu \, e^{\frac{\nu\pi}{\omega} ui} \right\}$$

darstellen. Man hat aber nach (6.)

$$(12.)\qquad \chi(\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega} + 2\nu\omega') - \chi(\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega}) = \frac{\nu\pi i}{\omega}(\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega} + \nu\omega').$$

Folglich, wenn man

$$\boldsymbol{A}_\nu = \boldsymbol{C}_\nu\, e^{\frac{\nu\pi i}{\omega}(\overset{0}{\omega}+\nu\omega')}$$

setzt,

$$(13.)\qquad f'(\boldsymbol{u}) = \sum_\nu \left\{\boldsymbol{C}_\nu\, e^{\chi(\boldsymbol{u}+\overset{0}{\omega}+2\nu\omega')-\chi(\boldsymbol{u}+\overset{0}{\omega})}\right\},$$

und daher (nach 11.)

$$(14.)\qquad f(\boldsymbol{u}) = e^{\frac{mm'}{2}\pi i}\sum \left\{\boldsymbol{C}_\nu\, e^{\chi(\boldsymbol{u}+\overset{0}{\omega}+2\nu\omega')}\right\}.$$

In dieser Gleichung werde jetzt $\boldsymbol{u} + 2\omega'$ für $\boldsymbol{u}$ gesetzt, und zugleich $\nu - 1$ für ν, was erlaubt ist, weil $\nu - 1$ so gut als ν jede ganze Zahl repräsentirt, so kommt mit Berücksichtigung von (8.)

$$f(\boldsymbol{u}) = e^{\frac{mm'}{2}\pi i}\sum_\nu \left\{\boldsymbol{C}_{\nu-1}\, e^{\chi(\boldsymbol{u}+\overset{0}{\omega}+2\nu\omega')}\right\}.$$

In dieser Reihe muß aber jeder Coefficient mit dem gleichstelligen der vorhergehenden übereinstimmen, weil sich, wenn dies nicht der Fall wäre, aus ihr durch Multiplication mit $e^{-\chi(\boldsymbol{u}+\overset{0}{\omega})}$ für $f'(\boldsymbol{u})$ eine zweite Reihe von der Form

$$\sum_\nu \left\{\boldsymbol{A}'_\nu\, e^{\frac{\nu\pi\boldsymbol{u}i}{\omega}}\right\}$$

ergeben würde, welche es nicht giebt. Daher muß $\boldsymbol{C}_\nu = \boldsymbol{C}_{\nu-1}$ sein, woraus folgt, daß sämmtliche Coefficienten $\boldsymbol{C}_\nu$ denselben Werth haben, der durch

$$ge^{-\frac{mm'}{2}\pi i}$$

bezeichnet werden möge. Somit erhält man, wenn zugleich statt $f(\boldsymbol{u})$ wieder $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ eingeführt wird,

$$(15.)\qquad e^{\frac{\eta\boldsymbol{u}^2}{2\omega}+\chi(\boldsymbol{u}-m'\omega)}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = g\,.\sum_\nu \left\{e^{\chi(\boldsymbol{u}+\overset{0}{\omega}+2\nu\omega')}\right\},$$

oder, da

$$(16.)\qquad \chi(\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega} + \nu\omega') - \chi(\boldsymbol{u} - m'\omega) = \frac{2\nu + m}{2} \cdot \frac{\pi i}{\omega}\Big(\boldsymbol{u} - m'\omega + \frac{2\nu + m}{2}\omega'\Big)$$

ist,

$$(17.)\qquad e^{\frac{\eta \boldsymbol{u}^2}{2\omega}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = g \cdot \sum_\nu \Big\{ e^{\frac{2\nu + m}{2} \cdot \frac{\pi i}{\omega}\left(\boldsymbol{u} - m'\omega + \frac{2\nu + m}{2}\omega'\right)} \Big\}.$$

Da m eine ganze Zahl ist, so darf man in dieser Reihe $(-\nu - m)$ statt ν setzen; verbindet man dann die so sich ergebende Gleichung mit der vorstehenden, so kommt

$$(18.)\qquad e^{\frac{\eta \boldsymbol{u}^2}{2\omega}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = g \cdot \sum_\nu \Big\{ e^{-\left(\nu + \frac{m}{2}\right)^2 \frac{\omega'\pi}{\omega i}} \cos(2\nu + m)\Big(\frac{\boldsymbol{u}}{2\omega} - \frac{m'}{2}\Big)\pi \Big\}.$$

Aus diesen Gleichungen (15, 16, 17) erhält man nun sofort drei neue, indem man die oben angegebene Substitution ω' für ω u. s. w. macht, wobei zugleich $(-\nu)$ für ν geschrieben, und der Werth, den die Constante g alsdann annehmen muß, mit g' bezeichnet werde.

$$(19.)\qquad e^{\frac{\eta' \boldsymbol{u}^2}{2\omega'} - \chi(\boldsymbol{u} + m\omega')} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = g' \cdot \sum_\nu \Big\{ e^{-\chi(\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega} + 2\nu\omega)} \Big\}$$

$$(20.)\qquad e^{\frac{\eta' \boldsymbol{u}^2}{2\omega'}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = g' \cdot \sum_\nu \Big\{ e^{-\frac{2\nu - m'}{2} \cdot \frac{\pi i}{\omega'}\left(\boldsymbol{u} + m\omega' + \frac{2\nu - m'}{2}\omega\right)} \Big\}$$

$$(21.)\qquad e^{\frac{\eta' \boldsymbol{u}^2}{2\omega'}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = g' \cdot \sum_\nu \Big\{ e^{-\left(\nu - \frac{m'}{2}\right)^2 \frac{\omega i\pi}{\omega'}} \cos(2\nu - m')\Big(\frac{\boldsymbol{u}}{2\omega'} + \frac{m}{2}\Big)\pi \Big\}$$

Man sieht also, daß die Function $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$, bei dem vorausgesetzten analytischen Charakter derselben, durch die Gleichungen (1, 2) völlig bestimmt ist, bis auf eine Constante (g oder g'), welche ebenfalls vermittelst der vorstehenden Formeln gefunden wird, sobald man für irgend einen besondern Werth von $\boldsymbol{u}$ den von $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ kennt, vorausgesetzt, daß der letztere nicht Null ist. Man kann dabei bemerken, daß die Gleichungen (15, 17, 19, 20) auch dann noch eine strenge Folgerung aus den eben genannten bleiben, wenn auch unter m, m' nicht mehr ganze Zahlen verstanden werden.

Da die erhaltenen Reihen für jeden Werth von $\boldsymbol{u}$ convergiren, so kann man schließen, daß $\frac{\omega'}{\omega i}$, wie auch der Modul k beschaffen sein möge, entweder

eine reelle positive Größe sein muß, oder eine imaginäre, deren reeller Theil positiv ist. Umgekehrt sind die Reihen stäts wirklich convergent, sobald man für ω, ω' beliebige Größen annimmt, welche diese Bedingung erfüllen, abgesehen davon, ob sie in der oben angegebenen Form durch $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{K}'$ ausgedrückt werden können oder nicht. Stellt man sich nun vor, man bestimme, indem man mit h irgend eine (complexe) Größe, deren reeller Theil positiv ist, bezeichnet, bei willkührlicher Annahme von ω, η (wobei jedoch für ω der Werth Null auszuschließen ist) ω', η' durch die Gleichungen

$$(22.)\qquad \frac{\omega'}{\omega i} = h, \quad \frac{\eta'}{\omega'} - \frac{\eta}{\omega} = \frac{\pi i}{2\omega\omega'}, \quad \eta' = h\eta + \frac{\pi i}{2\omega},$$

und definire dann, m, m', g ebenfalls beliebig annehmend (also auch die Voraussetzung, daß m, m' ganze Zahlen seien, fallen lassend) eine Function $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ durch die Gleichung (15.) oder (17.); so besitzt dieselbe den Charakter einer ganzen rationalen Function, und es läßt sich zeigen, daß sie stäts auch die Gleichungen (1.) befriedigt, und daß daher für sie auch die Gleichungen (19, 20.) gelten.

Denn die Gleichung (17.) – und es ist ganz einerlei, ob man von dieser oder von Nr. (15.) ausgeht, indem jede von ihnen eine unmittelbare Folge der andern ist – zeigt, daß man

$$e^{\frac{\eta(\boldsymbol{u}+2\omega)^2}{2\omega}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}+2\omega) = e^{\frac{\eta\boldsymbol{u}^2}{2\omega}+m\pi i}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$$

hat, was die erste der genannten Gleichungen ist, indem jedes Glied der Reihe auf der Rechten, wenn man $\boldsymbol{u}+2\omega$ für $\boldsymbol{u}$ setzt, dieselbe Veränderung erfährt, als wenn es mit $e^{(2\nu+m)\pi i} = e^{m\pi i}$ multiplicirt wird. In der Reihe auf der Rechten der Gleichung (15.) aber darf man $\nu-1$ für ν setzen, und wenn man dann $\boldsymbol{u}+2\omega'$ an die Stelle von $\boldsymbol{u}$ treten läßt, so sieht man, daß

$$e^{\frac{\eta(\boldsymbol{u}+2\omega')^2}{2\omega}+\chi(\boldsymbol{u}-m'\omega+2\omega')}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}+2\omega') = e^{\frac{\eta\boldsymbol{u}^2}{2\omega}+\chi(\boldsymbol{u}-m'\omega)}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$$

ist, woraus, da man

$$\chi(\boldsymbol{u}-m'\omega+2\omega') - \chi(\boldsymbol{u}-m'\omega) = \chi(\boldsymbol{u}+2\omega') - \chi(\boldsymbol{u}) - m'\pi i$$

$$\frac{\eta\boldsymbol{u}^2}{2\omega} + \chi(\boldsymbol{u}) = \frac{\eta'\boldsymbol{u}^2}{2\omega'}, \qquad \frac{\eta(\boldsymbol{u}+2\omega')^2}{2\omega} + \chi(\boldsymbol{u}+2\omega') = \frac{\eta'(\boldsymbol{u}+2\omega')^2}{2\omega'}$$

hat,

$$e^{\frac{\eta'(\boldsymbol{u}+2\omega')^2}{2\omega'}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}+2\omega') = e^{\frac{\eta'\boldsymbol{u}^2}{2\omega'}+m'\pi i}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$$

folgt, was die zweite der Gleichungen (1) ist. Von denselben sind aber die unter (18 – 21) angegebenen eine Folge.

Hätte man bei willkührlicher Annahme von ω', η', m, m', g' die Größen η, ω vermittelst der Formeln (22) bestimmt, und dann $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ durch die Gleichung (19) oder (20) definirt; so würde sich eben so ergeben, daß für $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ die Gleichungen (1) gelten, und somit auch (15, 17, 18).

Betrachten wir jetzt insbesondere die Function, welche durch die Gleichung (17) bei der Annahme

$$2\omega = 1, \quad \eta = 0, \quad 2\omega' = hi, \quad \eta' = \pi i, \quad m = 0, \quad m' = 0, \quad g = 1$$

definirt wird, welche die einfachste von allen ist, und nach dem Vorschlage ***Lejeune Dirichlet's***, weil sie von ***Jacobi*** in die Analysis eingeführt worden ist, die ***Jacobi'sche Function*** genannt, und dieser Benennung entsprechend durch

$$Jc(\boldsymbol{u}, h)$$

bezeichnet werden möge; wo man dann

$$(23.) \qquad Jc(\boldsymbol{u}, h) = \sum_{\nu} \left\{ e^{(-\nu^2 h + 2\nu \boldsymbol{u} i)\pi} \right\} = \sum_{\nu} \left\{ e^{-\nu^2 h\pi} \cos 2\nu \boldsymbol{u} \pi \right\}$$

hat, und wenn die Größe h, die, wie bemerkt, stäts eine positive reelle, oder eine imaginäre, deren reeller Theil positiv ist, sein muß, im Verlaufe einer Untersuchung denselben Werth beibehält, kürzer auch bloß $Jc(\boldsymbol{u})$ schreiben kann. Die Gleichungen (1) gestalten sich dann folgendermaßen

$$(24.) \qquad \begin{cases} Jc(\boldsymbol{u} + 1, h) = Jc(\boldsymbol{u}, h) \\ Jc(\boldsymbol{u} + hi, h) = e^{-(2\boldsymbol{u} + hi)\pi i} Jc(\boldsymbol{u}, h). \end{cases}$$

Ferner ist jetzt nach (19), indem $\chi(\boldsymbol{u}) = \frac{\pi}{h}\boldsymbol{u}^2$, $\frac{\eta'}{2\omega'} = \frac{\pi}{h}$,

$$Jc(\boldsymbol{u}, h) = g' \cdot \sum_{\nu} \left\{ e^{-\frac{\pi}{h}(\boldsymbol{u}+\nu)^2} \right\},$$

wo die Constante g', nach ***Jacobi***, auf folgende Weise ermittelt wird. Es ist, wenn man sich jetzt unter $\boldsymbol{u}$ eine reelle Größe denkt,

$$\int_0^1 Jc(\boldsymbol{u}, h)\, d\boldsymbol{u} = \sum_{\nu} \int_0^1 e^{-\nu^2 h\pi} \cos 2\nu \boldsymbol{u} \pi \cdot d\boldsymbol{u} = 1.$$

Daher muß

$$\frac{1}{g'} = \int_0^1 \sum_\nu \left\{ e^{-\frac{\pi}{h}(\boldsymbol{u}+\nu)^2} \right\} d\boldsymbol{u} = \sum_\nu \int_0^1 e^{-\frac{\pi}{h}(\boldsymbol{u}+\nu)^2}\, d\boldsymbol{u}$$

$$= \sum_\nu \int_\nu^{\nu+1} e^{-\frac{\pi}{h}\boldsymbol{u}^2}\, d\boldsymbol{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{h}\boldsymbol{u}^2}\, d\boldsymbol{u}$$

sein. Aber

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{h}\boldsymbol{u}^2}\, d\boldsymbol{u} = \sqrt{h},$$

wo, wenn h reell ist, der positive Werth der Wurzel, und, wenn h imaginär, derjenige, dessen reeller Theil positiv ist, genommen werden muß. Folglich hat man

(25.) $$\sqrt{h} \,.\, Jc(\boldsymbol{u}, h) = \sum_\nu \left\{ e^{-\frac{\pi}{h}(\boldsymbol{u}+\nu)^2} \right\}.$$

Nach der Formel (15.) aber ist

(26.) $$e^{\frac{\pi}{h}\boldsymbol{u}^2} Jc(\boldsymbol{u}, h) = \sum_\nu \left\{ e^{\frac{\pi}{h}(\boldsymbol{u}+\nu hi)^2} \right\} = \sum_\nu \left\{ e^{-h\pi\left(\frac{\boldsymbol{u}}{hi}+\nu\right)^2} \right\}.$$

Aber

$$\sum_\nu \left\{ e^{-h\pi\left(\frac{\boldsymbol{u}}{hi}+\nu\right)^2} \right\} = \frac{1}{\sqrt{h}} Jc\left(\frac{\boldsymbol{u}}{hi}, \frac{1}{h}\right).$$

Daher

(27.) $$Jc(\boldsymbol{u}, h) = \frac{e^{-\frac{\pi}{h}\boldsymbol{u}^2}}{\sqrt{h}} \,.\, Jc\left(\frac{\boldsymbol{u}}{hi}, \frac{1}{h}\right) = \frac{e^{-\frac{\pi}{h}\boldsymbol{u}^2}}{\sqrt{h}} \,.\, Jc\left(\frac{\boldsymbol{u}i}{h}, \frac{1}{h}\right)$$

(28.) $$Jc(\boldsymbol{u}i, h) = \frac{e^{\frac{\pi}{h}\boldsymbol{u}^2}}{\sqrt{h}} \,.\, Jc\left(\frac{\boldsymbol{u}}{h}, \frac{1}{h}\right).$$

In der Reihe (23) bleibt ferner das allgemeine Glied ungeändert, wenn man $\boldsymbol{u}+\frac{\tau}{2}$ für $\boldsymbol{u}$, und zugleich $h + \tau i$ für h setzt, τ aber eine ganze Zahl bedeutet. Denn dadurch wird dasselbe nur mit $e^{-\nu(\nu+1)\tau\pi i} = 1$ multiplicirt. Folglich hat man

(29.) $$Jc(\boldsymbol{u},\, h) = Jc\left(\boldsymbol{u} + \frac{\tau}{2}, h + \tau i\right),$$

und erhält aus (27.)

$$(30.)\qquad \boldsymbol{J}c(\boldsymbol{u},h) = \frac{e^{-\frac{\pi}{h}\boldsymbol{u}^2}}{\sqrt{h}} \cdot \boldsymbol{J}c\Big(\frac{\boldsymbol{u}}{hi} + \frac{\tau}{2}, h_1\Big),$$

$$\text{wenn}\quad h_1 = \frac{1}{h} + \tau i \quad \text{ist.}$$

In den vorstehenden Formeln (23 – 30) sind die wichtigsten Eigenschaften der ***Jacobi***'schen Function ausgesprochen. Durch dieselbe lassen sich nun die obigen Reihen (15, 17, 19, 20) leicht ausdrücken. Man hat nämlich

$$\chi(\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega} + 2\nu\omega') = -\frac{\omega'\pi}{\omega i}\Big(\frac{\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega}}{2\omega'} + \nu\Big)^2$$

$$-\chi(\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega} + 2\nu\omega) = -\frac{\omega i\pi}{\omega'}\Big(\frac{\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega}}{2\omega} + \nu\Big)^2,$$

und daher

$$(31.)\qquad \sum_\nu \Big\{e^{-\chi(\boldsymbol{u}+\overset{0}{\omega}+2\nu\omega)}\Big\} = \sqrt{\frac{\omega'}{\omega i}} \cdot \boldsymbol{J}c\Big(\frac{\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega}}{2\omega}, \frac{\omega'}{\omega i}\Big)$$

$$(32.)\qquad \sum_\nu \Big\{e^{\chi(\boldsymbol{u}+\overset{0}{\omega}+2\nu\omega')}\Big\} = \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} \cdot \boldsymbol{J}c\Big(\frac{\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega}}{2\omega'}, \frac{\omega i}{\omega'}\Big).$$

Nach (27) aber ist

$$(33.)\qquad \sqrt{\frac{\omega'}{\omega i}} \cdot \boldsymbol{J}c\Big(\frac{\boldsymbol{u}}{2\omega}, \frac{\omega'}{\omega i}\Big) = e^{-\chi(\boldsymbol{u})}\boldsymbol{J}c\Big(\frac{\boldsymbol{u}}{2\omega'}, \frac{\omega i}{\omega'}\Big),$$

und daher

$$(34.)\qquad \sum_\nu \Big\{e^{\frac{2\nu+m}{2}\cdot\frac{\pi i}{\omega}\left(\boldsymbol{u}-m'\omega+\frac{2\nu+m}{2}\omega'\right)}\Big\} = e^{\chi(\boldsymbol{u}+\overset{0}{\omega})-\chi(\boldsymbol{u}-m'\omega)}\boldsymbol{J}c\Big(\frac{\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega}}{2\omega}, \frac{\omega'}{\omega i}\Big)$$

$$(35.)\qquad \sum_\nu \Big\{e^{-\frac{2\nu-m'}{2}\cdot\frac{\pi i}{\omega'}\left(\boldsymbol{u}+m\omega'+\frac{2\nu-m'}{2}\omega\right)}\Big\} = e^{\chi(\boldsymbol{u}+m\omega')-\chi(\boldsymbol{u}+\overset{0}{\omega})}\boldsymbol{J}c\Big(\frac{\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega}}{2\omega'}, \frac{\omega i}{\omega'}\Big).$$

Hiernach geben die Gleichungen (15, 17, 19, 20)

$$(36.)\qquad e^{\frac{\eta\boldsymbol{u}^2}{2\omega}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = g e^{\chi(\boldsymbol{u}+\overset{0}{\omega})-\chi(\boldsymbol{u}-m'\omega)}\boldsymbol{J}c\Big(\frac{\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega}}{2\omega}, \frac{\omega'}{\omega i}\Big)$$

$$= g\sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} \cdot e^{-\chi(\boldsymbol{u}-m'\omega)}\boldsymbol{J}c\Big(\frac{\boldsymbol{u} + \overset{0}{\omega}}{2\omega'}, \frac{\omega i}{\omega'}\Big)$$

$$(37.)\qquad e^{\frac{\eta' u^2}{2\omega'}} F(u) = g' e^{-\chi(u+\overset{0}{\omega})+\chi(u+m\omega')} Jc\left(\frac{u+\overset{0}{\omega}}{2\omega'}, \frac{\omega i}{\omega'}\right)$$

$$= g' \sqrt{\frac{\omega'}{\omega i}} \cdot e^{\chi(u+m\omega')} Jc\left(\frac{u+\overset{0}{\omega}}{2\omega}, \frac{\omega'}{\omega i}\right).$$

Aus der Vergleichung dieser Ausdrücke ergiebt sich noch, indem

$$\chi(u+\overset{0}{\omega}) - \chi(u - m'\omega) - \chi(u + m\omega') = -\chi(u) - \frac{mm'}{2}\pi i$$

ist,

$$(38.)\qquad g' = e^{-\frac{mm'}{2}\pi i} \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} \cdot g.$$

Das Ergebniß der vorstehenden Untersuchung ist also, daß sich jede Function, welche die im Anfange dieses §. angegebenen Eigenschaften besitzt, welche Werthe auch die Größen ω, ω', η, η', m, m' haben mögen, auf die ***Jacobi***'sche zurückführen läßt.

§. 13.

Schluß der die elliptischen Functionen betreffenden Entwicklungen.

Die specielle Anwendung der entwickelten Formeln auf die Functionen Al(u) u. s. w. will ich hier nur kurz andeuten. Zuerst bemerke ich, daß $(\mathfrak{m}+1)\mathfrak{n} + \mathfrak{m}$ und $(\mathfrak{m}'+1)\mathfrak{n}' + \mathfrak{m}'$ aus dem Grunde, weil weder $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ noch $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ einen gemeinschaftlichen Theiler haben, beide ungerade Zahlen sind, und man daher

$$(1.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{m}\mathfrak{n}+\mathfrak{n} \equiv \mathfrak{m}+1 & \mathfrak{m}'\mathfrak{n}'+\mathfrak{n}' \equiv \mathfrak{m}+1 \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n}+\mathfrak{m}+\mathfrak{n} \equiv 1 & \mathfrak{m}'\mathfrak{n}'+\mathfrak{m}'+\mathfrak{n}' \equiv 1 \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n}+\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{n}+1 & \mathfrak{m}'\mathfrak{n}'+\mathfrak{m}' \equiv \mathfrak{n}'+1 \\ \mathfrak{m}\mathfrak{n} \equiv \mathfrak{m}+\mathfrak{n}+1 & \mathfrak{m}'\mathfrak{n}' \equiv \mathfrak{m}'+\mathfrak{n}'+1 \end{cases} \qquad (\text{mod. } 2)$$

hat. Nimmt man daher

$$(2.)\qquad \begin{cases} m \equiv \mathfrak{m}+1 & m' \equiv \mathfrak{m}'+1 & l = 1-m-n \\ n \equiv \mathfrak{n}+1 & n' \equiv \mathfrak{n}'+1 & l' = 1-m'-n', \end{cases}$$

wobei man jeder der Zahlen m, n, m', n' einen der Werthe 0, 1 beilegen kann, und dann auch l sowohl als l' entweder = 0, oder = 1 erhält; so geben die Gleichungen (20) d. §. 11.

$$(3.)\quad \begin{cases} \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}+2\omega) \;\;= e^{-2\eta(\boldsymbol{u}+\omega)+m\pi i}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u}) & \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}+2\omega') \;\;= e^{-2\eta'(\boldsymbol{u}+\omega')+m'\pi i}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u}) \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}+2\omega)_1 = e^{-2\eta(\boldsymbol{u}+\omega)+\pi i}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1 & \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}+2\omega')_1 = e^{-2\eta'(\boldsymbol{u}+\omega')+\pi i}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1 \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}+2\omega)_2 = e^{-2\eta(\boldsymbol{u}+\omega)+n\pi i}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2 & \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}+2\omega')_2 = e^{-2\eta'(\boldsymbol{u}+\omega')+n'\pi i}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2 \\ \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}+2\omega)_3 = e^{-2\eta(\boldsymbol{u}+\omega)+l\pi i}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3 & \mathrm{Al}(\boldsymbol{u}+2\omega')_3 = e^{-2\eta'(\boldsymbol{u}+\omega')+l'\pi i}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3. \end{cases}$$

Es ist leicht nachzuweisen, daß die Combinationen

$$m,\; m' \qquad\qquad n,\; n' \qquad\qquad l,\; l'$$

mit den folgenden

$$0,\; 1 \qquad\qquad 1,\; 0 \qquad\qquad 0,\; 0$$

übereinstimmen müssen, abgesehen von der Aufeinanderfolge. Hiernach geben die Formeln (15, 17, 18, 19, 20, 21, 36, 37) d. v. §. unmittelbar die Ausdrücke von $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_1$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2$, $\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3$, sobald die Constanten g, g' für jede einzelne dieser Functionen bestimmt sind. Dies kann aber unter Andern für die 1ste, 3te und 4te dadurch geschehen, daß man $\boldsymbol{u} = 0$ setzt, indem die letztern dann den Werth 1 erhalten.

Zur Abkürzung werde

$$(4.)\qquad e^{\chi(\boldsymbol{u}+p\omega'-q\omega)-\chi(\boldsymbol{u}-q\omega)}\,Jc\Big(\frac{\boldsymbol{u}+p\omega'-q\omega}{2\omega},\,\frac{\omega'}{\omega i}\Big) = \Theta(\boldsymbol{u})_{p,q}$$

$$(5.)\qquad e^{-\chi(\boldsymbol{u}+p\omega'-q\omega)+\chi(\boldsymbol{u}+q\omega')}\,Jc\Big(\frac{\boldsymbol{u}+p\omega'-q\omega}{2\omega},\,\frac{\omega i}{\omega'}\Big) = \Theta'(\boldsymbol{u})_{q,p}$$

gesetzt, wo p, q beliebige Zahlen bedeuten, und man in Folge von (33.) und (7.) d. v. §.

$$(6.)\qquad \Theta(\boldsymbol{u})_{p,q} = \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}}\,.\,e^{-\chi(\boldsymbol{u})-\frac{pq}{2}\pi i}\,\Theta'(\boldsymbol{u})_{q,p}$$

hat. Dann erhält man aus den Gleichungen (36, 37) nach dem eben Bemerkten

$$(6.)\qquad e^{\frac{\eta\boldsymbol{u}^2}{2\omega}}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u}) \;\;= \frac{\Theta(\boldsymbol{u})_{m,m'}}{\Theta(0)_{m,m'}} \qquad\qquad e^{\frac{\eta'\boldsymbol{u}^2}{2\omega'}}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u}) \;\;= \frac{\Theta'(\boldsymbol{u})_{m',m}}{\Theta'(0)_{m',m}}$$

$$(7.)\qquad e^{\frac{\eta\boldsymbol{u}^2}{2\omega}}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2 = \frac{\Theta(\boldsymbol{u})_{n,n'}}{\Theta(0)_{n,n'}} \qquad\qquad e^{\frac{\eta'\boldsymbol{u}^2}{2\omega'}}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_2 = \frac{\Theta'(\boldsymbol{u})_{n',n}}{\Theta'(0)_{n',n}}$$

$$(8.)\qquad e^{\frac{\eta\boldsymbol{u}^2}{2\omega}}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3 = \frac{\Theta(\boldsymbol{u})_{l,l'}}{\Theta(0)_{l,l'}} \qquad\qquad e^{\frac{\eta'\boldsymbol{u}^2}{2\omega'}}\,\mathrm{Al}(\boldsymbol{u})_3 = \frac{\Theta'(\boldsymbol{u})_{l',l}}{\Theta'(0)_{l',l}}.$$

Ferner hat man

$$e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\,\mathrm{Al}(u)_1 = g\Theta(u)_{1,1}$$

und daher

$$\mathrm{sn}\, u = g\Theta(0)_{m,m'} \cdot \frac{\Theta(u)_{1,1}}{\Theta(u)_{m,m'}}.$$

In dieser Gleichung setze man

$$u = (n-1)\omega' - (n'-1)\omega,$$

so erhält man aus (42, 43) nach einigen Reductionen

$$\mathrm{sn}\Big((n-1)\omega' - (n'-1)\omega\Big) = i^{(n-1)(1-m')}\frac{g\Theta(0)_{m,m'}\,\Theta(0)_{n,n'}}{\Theta(0)_{l,l'}}.$$

Aber

$$(n-1)\omega' - (n'-1)\omega = \Big((n-1)\mathfrak{m}' - (n'-1)\mathfrak{m}\Big)K + \Big((n-1)\mathfrak{n}' - (n'-1)\mathfrak{n}\Big)K'i,$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung $\mathfrak{m}\,\mathfrak{n}' - \mathfrak{n}\,\mathfrak{m}' = 1$,

$$(n-1)\omega' - (n'-1)\omega = (2\mathfrak{r}-1)\,K + 2\mathfrak{r}'K'i,$$

wo

$$(9.)\qquad \begin{cases} 2\mathfrak{r} \;= (\mathfrak{n}'+1-n')\,\mathfrak{m} - (\mathfrak{n}+1-n)\,\mathfrak{m}' \\ 2\mathfrak{r}' = (\mathfrak{n}'+1-n')\,\mathfrak{n} \;- (\mathfrak{n}+1-n)\,\mathfrak{n}' \end{cases}$$

ist, und aus (40) sich ergiebt, daß $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ ganze Zahlen sind. Daher hat man

$$\mathrm{sn}\Big((n-1)\omega' - (n'-1)\omega\Big) = \mathrm{sn}(-K + 2\mathfrak{r}K + 2\mathfrak{r}'K'i) = (-1)^{\mathfrak{r}-1}.$$

Damit ist der Werth von g bestimmt, und man erhält

$$(10.)\qquad \begin{cases} e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\,\mathrm{Al}(u)_1 = \dfrac{(-1)^{\mathfrak{r}-1}}{i^{(n-1)(1-m')}} \cdot \dfrac{\Theta(0)_{l,l'}}{\Theta(0)_{m,m'}} \cdot \dfrac{\Theta(u)_{1,1}}{\Theta(0)_{n,n'}} \\ e^{\frac{\eta' u^2}{2\omega'}}\,\mathrm{Al}(u)_1 = \dfrac{(-1)^{\mathfrak{r}-1}}{i^{(n-1)(1-m')+1}} \cdot \dfrac{\Theta'(0)_{l',l}}{\Theta'(0)_{m',m}} \cdot \dfrac{\Theta'(u)_{1,1}}{\Theta'(0)_{n',n}}. \end{cases}$$

Die zweite dieser Gleichungen ergiebt sich aus der ersten vermittelst der Relation (6), wobei zu bemerken ist, daß nach dem Obigen $mm' = 0$, $nn' = 0$, $ll' = 0$ ist.

Wenn p, q ganze Zahlen sind, so erhält man nach dem, was im vorhergehenden §. in Betreff der Ableitung der Formeln (18, 21) aus den unter (17, 20) aufgestellten bemerkt ist

(11.)
$$\begin{cases} \Theta(\boldsymbol{u})_{p,q} = \sum\limits_{\nu} \left\{ e^{-\left(\nu+\frac{p}{2}\right)^2 \frac{\omega'\pi}{\omega i}} \cos(2\nu+p)\left(\frac{\boldsymbol{u}}{2\omega} - \frac{q}{2}\right)\pi \right\} \\ \Theta'(\boldsymbol{u})_{p,q} = \sum\limits_{\nu} \left\{ e^{-\left(\nu-\frac{q}{2}\right)^2 \frac{\omega i\pi}{\omega'}} \cos(2\nu-q)\left(\frac{\boldsymbol{u}}{2\omega'} + \frac{p}{2}\right)\pi \right\}. \end{cases}$$

Und hieraus

(12.)
$$\begin{cases} \Theta(\boldsymbol{u})_{0,0} = \sum\limits_{\nu} \left\{ e^{-\nu^2 \frac{\omega'\pi}{\omega i}} \cos 2\nu \frac{\boldsymbol{u}\pi}{2\omega} \right\} \\ \Theta(\boldsymbol{u})_{0,1} = \sum\limits_{\nu} \left\{ (-1)^\nu e^{-\nu^2 \frac{\omega'\pi}{\omega i}} \cos 2\nu \frac{\boldsymbol{u}\pi}{2\omega} \right\} \\ \Theta(\boldsymbol{u})_{1,0} = \sum\limits_{\nu} \left\{ e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\omega'\pi}{\omega i}} \cos(2\nu+1) \frac{\boldsymbol{u}\pi}{2\omega} \right\} \\ \Theta(\boldsymbol{u})_{1,1} = \sum\limits_{\nu} \left\{ (-1)^\nu e^{-\left(\nu+\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\omega'\pi}{\omega i}} \sin(2\nu+1) \frac{\boldsymbol{u}\pi}{2\omega} \right\}, \end{cases}$$

(13.)
$$\begin{cases} \Theta'(\boldsymbol{u})_{0,0} = \sum\limits_{\nu} \left\{ e^{-\nu^2 \frac{\omega i\pi}{\omega'}} \cos 2\nu \frac{\boldsymbol{u}\pi}{\omega'} \right\} \\ \Theta'(\boldsymbol{u})_{0,1} = \sum\limits_{\nu} \left\{ (-1)^\nu e^{-\nu^2 \frac{\omega i\pi}{\omega'}} \cos 2\nu \frac{\boldsymbol{u}\pi}{\omega'} \right\} \\ \Theta'(\boldsymbol{u})_{1,0} = \sum\limits_{\nu} \left\{ e^{-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\omega i\pi}{\omega'}} \cos(2\nu-1) \frac{\boldsymbol{u}\pi}{\omega'} \right\} \\ \Theta'(\boldsymbol{u})_{1,1} = \sum\limits_{\nu} \left\{ (-1)^\nu e^{-\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\omega i\pi}{\omega'}} \sin(2\nu-1) \frac{\boldsymbol{u}\pi}{\omega'} \right\}. \end{cases}$$

Nimmt man $\omega = \boldsymbol{K}$, $\omega' = i\boldsymbol{K}'$, so erhält man die von ***Jacobi*** in den Fundamentis zur Darstellung von $\operatorname{sn} \boldsymbol{u}$, $\operatorname{cn} \boldsymbol{u}$, $\operatorname{dn} \boldsymbol{u}$ gegebenen Reihen.

Die in den Formeln (6, 7, 8, 10) vorkommenden Größen $\Theta(0)_{0,0}$ u. s. w. lassen sich bekanntlich durch k, k', $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K'}$ ausdrücken; was aber für beliebige Werthe von $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{n}'$ einige Erörterungen nöthig macht, in die ich hier nicht eingehn kann.

Hiermit breche ich die auf die elliptischen Functionen sich beziehenden Entwicklungen ab, die, obwohl die Resultate bekannt sind, hier einen Platz gefunden haben, weil die dabei befolgte Methode im Wesentlichen dieselbe ist, welche im Folgenden auch bei den ***Abel***'schen Functionen zur Anwendung kommen wird.

Ehe ich mich nun aber wieder zu diesen wende, darf ich nicht unerwähnt lassen, daß ursprünglich eine Bemerkung ***Abel's****) , in der er auf die in (§. 8 – 10) hergeleitete Darstellungsform der elliptischen Transcendenten hinweist, es gewesen ist, die mich zu einer neuen Behandlung dieser Functionen in der vorgetragenen Weise veranlaßte, und so auf den Weg führte, der mir auch in die Theorie der hyperelliptischen den Eingang eröffnete.

*) S. die Einleitung zu dessen Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, Œuvr. compl. Tom. I, pag. 234, sowie auch Lettre à Mr. Legendre, ib. Tom. II, pag. 259.

Anmerkungen der Korrekturleser

Im Buch-Original befindet sich kein Inhaltsverzeichnis. Im LaTeX-Quelltext ist ein einfaches Inhaltsverzeichnis enthalten, aber dieser Code ist standardmäßig ausgeschaltet. Bitte ziehen sie den Anfang der Quelldatei zu Rate, wenn Sie das PDF neu erzeugen wollen.

Inkonsiste Numerierung der Gleichungen (fehlende oder doppelte Nummern) wurden unverändert übernommen. Surd-Zeichen wurden durch Wurzeln ersetzt und in den meisten Fällen wurden Klammern um den Radikanden entfernt.

assistance they need, are critical to reaching Project Gutenberg-tm's goals and ensuring that the Project Gutenberg-tm collection will remain freely available for generations to come. In 2001, the Project Gutenberg Literary Archive Foundation was created to provide a secure and permanent future for Project Gutenberg-tm and future generations. To learn more about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation and how your efforts and donations can help, see Sections 3 and 4 and the Foundation web page at http://www.pglaf.org.

Section 3. Information about the Project Gutenberg Literary Archive Foundation

The Project Gutenberg Literary Archive Foundation is a non profit 501(c)(3) educational corporation organized under the laws of the state of Mississippi and granted tax exempt status by the Internal Revenue Service. The Foundation's EIN or federal tax identification number is 64-6221541. Its 501(c)(3) letter is posted at http://pglaf.org/fundraising. Contributions to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation are tax deductible to the full extent permitted by U.S. federal laws and your state's laws.

The Foundation's principal office is located at 4557 Melan Dr. S. Fairbanks, AK, 99712., but its volunteers and employees are scattered throughout numerous locations. Its business office is located at 809 North 1500 West, Salt Lake City, UT 84116, (801) 596-1887, email business@pglaf.org. Email contact links and up to date contact information can be found at the Foundation's web site and official page at http://pglaf.org

For additional contact information:
Dr. Gregory B. Newby
Chief Executive and Director
gbnewby@pglaf.org

Section 4. Information about Donations to the Project Gutenberg Literary Archive Foundation

Project Gutenberg-tm depends upon and cannot survive without wide spread public support and donations to carry out its mission of increasing the number of public domain and licensed works that can be freely distributed in machine readable form accessible by the widest array of equipment including outdated equipment. Many small donations ($1 to $5,000) are particularly important to maintaining tax exempt status with the IRS.

The Foundation is committed to complying with the laws regulating charities and charitable donations in all 50 states of the United States. Compliance requirements are not uniform and it takes a considerable effort, much paperwork and many fees to meet and keep up with these requirements. We do not solicit donations in locations where we have not received written confirmation of compliance. To SEND DONATIONS or determine the status of compliance for any